Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

К постановке вариационной задачи (для систем с диссипацией).

Как известно, при решении задач вариационного исчисления (и лагранжевой механики) функцию, представляющую собой решение задачи, варьируют, то-есть прибавляют к ней некую другую функцию, домноженную на числовой параметр (считающийся малым), и далее смотрят, как это добавление влияет на интеграл, экстремум которого ищется. Я ни в одной книге не видел конкретизации этой добавочной функции и считаю, что любопытно было бы придать ей какой-нибудь определенный вид и произвести вычисления. Пусть читатель пока наберется терпения – предложения, составляющие суть этой статьи, последуют дальше.

Приведем какой-нибудь простейший пример (чтоб не запутаться в громоздких вычислениях). Пусть действие (мы оперируем терминами классической механики) представляет собой такую величину:

$$S_0 = \int_0^\tau \frac{\dot{y}}{2} dt$$

Этому действию соответствует свободное движение частицы (с единичной массой). Это движение можно записать так:

$$y = Y_0 + vt$$

Добавку представим в таком виде

$$y_2 = \frac{4}{\tau^2}(t - \frac{\tau}{2})^2 - 1$$

Эта добавка, как видно, зануляется на концах интервала интегрирования.

Прибавим к решению эту добавку, домноженную на малый параметр α.

$$y + \alpha y_2 = Y_0 + vt + \frac{4}{\tau^2}(t - \frac{\tau}{2})^2 \alpha - \alpha$$

Теперь вычислим скорость (то-есть найдем производную этого выражения):

$$(y + \alpha y_2)' = v + \frac{8\alpha}{\tau^2}(t - \frac{\tau}{2}) = v + \frac{8\alpha}{\tau^2} t - \frac{4\alpha}{\tau}$$

Возведем теперь получившуюся скорость в квадрат.

$$((y + \alpha y_2)')^2 = (v - \frac{4\alpha}{\tau} + \frac{8\alpha}{\tau^2} t)^2 = (v - \frac{4\alpha}{\tau})^2 + \frac{16\alpha}{\tau^2} t (v - \frac{4\alpha}{\tau}) + 64\frac{\alpha^2 t^2}{\tau^4}$$

Теперь проинтегрируем это выражение, чтоб вычислить действие.

$$\int_0^\tau \frac{[(v - \frac{4\alpha}{\tau})^2 + \frac{16\alpha}{\tau^2} t (v - \frac{4\alpha}{\tau}) + 64\frac{\alpha^2 t^2}{\tau^4}]}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2}(v - \frac{4\alpha}{\tau})^2 t \Big|_0^\tau + \frac{1}{2}\frac{16\alpha}{\tau^2}(v - \frac{4\alpha}{\tau})\frac{t^2}{2}\Big|_0^\tau + \frac{1}{2} 64 \frac{\alpha^2 t^3}{3\tau^4}\Big|_0^\tau =$$

$$= \frac{1}{2}[(v - \frac{4\alpha}{\tau})^2 \tau + \frac{8\alpha}{\tau^2}(v - \frac{4\alpha}{\tau})\tau^2 + 64\frac{\alpha^2 \tau^3}{3\tau^4}] =$$

$$=\frac{1}{2}[(v-\frac{4\alpha}{\tau})(\tau(v-\frac{4\alpha}{\tau})+8\alpha)+64\frac{\alpha^2}{3\tau}]=$$

$$=\frac{1}{2}[\tau(v^2-\frac{16\alpha^2}{\tau^2})+64\frac{\alpha^2}{3\tau}]=\frac{1}{2}[\tau v^2+\frac{\alpha^2}{\tau}(\frac{64}{3}-16)]$$

Ничего удивительного, все вышло так, как мы и ожидали. Действие оказалось функцией малого параметра α. Членов, пропорциональных первой степени этого параметра, в конечном выражении не оказалось. Мы получили квадратичную зависимость действия от α. При нулевом же значении параметра мы имеем минимум.

Можно ли найти еще более простую добавочную функцию? Можно, но она уже будет не гладкой, а «ломаной», составленной из двух отрезков прямых. Запишем ее с помощью ступенчатых функций.

$$y_3=t\,h(-t+\frac{\tau}{2})+(-t+\tau)\,h(t-\frac{\tau}{2})$$

Ее производная:

$$y_3'=h(-t+\frac{\tau}{2})-h(t-\frac{\tau}{2})$$

Прибавим теперь к решению эту более простую добавку, тоже домноженную на малый параметр α.

$$y+\alpha y_3=Y_0+vt+\alpha t\,h(-t+\frac{\tau}{2})+\alpha(-t+\tau)\,h(t-\frac{\tau}{2})$$

Теперь вычислим скорость:

$$(y+\alpha y_3)'=v+\alpha h(-t+\frac{\tau}{2})-\alpha\,h(t-\frac{\tau}{2})$$

Возведем скорость в квадрат:

$$((y+\alpha y_3)')^2=\begin{cases}(v+\alpha)^2, & t<\frac{\tau}{2}\\ (v-\alpha)^2, & t>\frac{\tau}{2}\end{cases}$$

Теперь найдем действие (проинтегрируем).

$$\int_0^{\tau}\frac{(v+\alpha v_3)^2}{2}dt=\int_0^{\frac{\tau}{2}}\frac{[v^2+2\alpha v+\alpha^2]}{2}dt+\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}\frac{[v^2-2\alpha v+\alpha^2]}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}[(v^2+2\alpha v+\alpha^2)\frac{\tau}{2}+(v^2-2\alpha v+\alpha^2)\frac{\tau}{2}]=v^2\frac{\tau}{2}+\alpha^2\frac{\tau}{2}$$

Имеем аналогичный результат – члены, пропорциональные первой степени малого параметра, сокращаются, на выходе имеем квадратичную зависимость от параметра.

Теперь приступим к основной «изюминке» этой статьи. Возьмем функцию, соответствующую движению частицы в среде с трением.

$$y=-\frac{V_0}{\gamma}e^{-\gamma t}+Y_0$$

Ее производная:

$$y'=V_0e^{-\gamma t}$$

Такая функция у является решением дифференциального уравнения

$$y''+\gamma y'=0$$

Это уравнение с диссипацией, к уравнениям такого вида не принято применять вариационный подход (через лагранжиан). Но мы попробуем все-таки рассмотреть функционал вот такого вида (также назовем его «действием»):

$$S_0 = \int_0^{\tau} (\frac{\dot{y}(t)}{2} - \gamma \dot{y}(t) y) dt$$

Обращу внимание на важную деталь – «у» мы будем считать просто параметром, то-есть не будем подставлять вместо него решение, зависящее от времени. Но «варьировать» его, тем не менее, будем. Итак, «у» - это параметр, а производная от у – это функция, зависящая от времени (вместо этой самой производной от у мы при вычислениях будем подставлять производную решения).

Выпишем значение проварьированной функции у:

$$y + \alpha y_3 = y + \alpha t\, h(-t + \frac{\tau}{2}) + \alpha(-t + \tau)\, h(t - \frac{\tau}{2})$$

Мы применяем здесь функцию-добавку в более простом виде (с целью минимизации вычислений). Повторюсь – конкретное решение вместо «у» не подставляем!

Теперь выпишем значение для проварьированной скорости:

$$(y + \alpha y_3)' = V_0 e^{-\gamma t} + \alpha h(-t + \frac{\tau}{2}) - \alpha\, h(t - \frac{\tau}{2})$$

Возведем проварьированную скорость в квадрат:

$$((y(t) + \alpha y_3)')^2 = \begin{cases} (V_0 e^{-\gamma t} + \alpha)^2, & t < \frac{\tau}{2} \\ (V_0 e^{-\gamma t} - \alpha)^2, & t > \frac{\tau}{2} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} V_0{}^2 e^{-2\gamma t} + 2V_0 e^{-\gamma t}\alpha + \alpha^2, & t < \frac{\tau}{2} \\ V_0{}^2 e^{-2\gamma t} - 2V_0 e^{-\gamma t}\alpha + \alpha^2, & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

Для меньшей громоздкости текста сперва найдем интеграл от первого слагаемого действия. Приступим к интегрированию.

$$\int_0^{\tau} \frac{(v + \alpha v_3)^2}{2} dt = \int_0^{\tau} \frac{((y(t) + \alpha y_3)')^2}{2} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{[V_0{}^2 e^{-2\gamma t} + 2V_0 e^{-\gamma t}\alpha + \alpha^2]}{2} dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \frac{[V_0{}^2 e^{-2\gamma t} - 2V_0 e^{-\gamma t}\alpha + \alpha^2]}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{V_0{}^2 e^{-2\gamma t}}{(-2\gamma)}\Big|_0^{\frac{\tau}{2}} + \frac{2\alpha V_0 e^{-\gamma t}}{(-\gamma)}\Big|_0^{\frac{\tau}{2}} + \frac{1}{2}\alpha^2 t\Big|_0^{\frac{\tau}{2}}] +$$

$$+ \frac{1}{2}[\frac{V_0{}^2 e^{-2\gamma t}}{(-2\gamma)}\Big|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} - \frac{2\alpha V_0 e^{-\gamma t}}{(-\gamma)}\Big|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} + \frac{1}{2}\alpha^2 t\Big|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}] =$$

$$= \frac{V_0{}^2 (e^{-\gamma\tau} - 1)}{(-4\gamma)} - \frac{\alpha V_0 (e^{-\gamma\frac{\tau}{2}} - 1)}{\gamma} + \frac{\alpha^2 \tau}{2} +$$

$$+ \frac{V_0{}^2 (e^{-2\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau})}{(-4\gamma)} + \frac{\alpha V_0 (e^{-\gamma\tau} - e^{-\gamma\frac{\tau}{2}})}{\gamma}$$

Теперь займемся вторым слагаемым нашего действия (потом мы это второе слагаемое вычтем из первого).

$$\gamma(y+\alpha y_3)(y(t)+\alpha y_3)' = \begin{cases} (y+\alpha t)(V_0 e^{-\gamma t}+\alpha), & t<\dfrac{\tau}{2} \\ (y-\alpha t+\alpha\tau)(V_0 e^{-\gamma t}-\alpha), & t>\dfrac{\tau}{2} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} yV_0 e^{-\gamma t}+\alpha t V_0 e^{-\gamma t}+y\alpha+\alpha^2 t, & t<\dfrac{\tau}{2} \\ yV_0 e^{-\gamma t}-\alpha t V_0 e^{-\gamma t}-y\alpha+\alpha^2 t+\alpha\tau V_0 e^{-\gamma t}-\alpha^2\tau, & t>\dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$

Проинтегрируем.

$$\gamma\int_0^{\tau}(y+\alpha y_3)(y(t)+\alpha y_3)'dt = \gamma V_0 y\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-\gamma t}dt+\gamma\alpha V_0\int_0^{\frac{\tau}{2}} te^{-\gamma t}dt+\gamma\alpha y\int_0^{\frac{\tau}{2}} dt+\gamma\alpha^2\int_0^{\frac{\tau}{2}} tdt+$$

$$+\gamma V_0 y\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} e^{-\gamma t}dt-\gamma\alpha V_0\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} te^{-\gamma t}dt-\gamma\alpha y\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} dt+\gamma\alpha^2\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} tdt+\gamma\tau\alpha V_0\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} e^{-\gamma t}dt-\gamma\tau\alpha^2\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} dt=$$

$$=\frac{\gamma V_0 y e^{-\gamma t}}{-\gamma}\bigg|_0^{\frac{\tau}{2}}+\gamma\alpha V_0\Big[\frac{-te^{-\gamma t}}{\gamma}-\frac{e^{-\gamma t}}{\gamma^2}\Big]\bigg|_0^{\frac{\tau}{2}}+\gamma\alpha^2\frac{t^2}{2}\bigg|_0^{\frac{\tau}{2}}+$$

$$+\frac{\gamma V_0 y e^{-\gamma t}}{-\gamma}\bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}-\gamma\alpha V_0\Big[\frac{-te^{-\gamma t}}{\gamma}-\frac{e^{-\gamma t}}{\gamma^2}\Big]\bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}+\gamma\alpha^2\frac{t^2}{2}\bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}+\frac{\gamma\alpha\tau V_0 e^{-\gamma t}}{-\gamma}\bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}-\gamma\alpha^2\tau t\Big|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}=$$

$$=\frac{\gamma V_0 y}{-\gamma}[e^{-\gamma\frac{\tau}{2}}-1+e^{-\gamma\tau}-e^{-\gamma\frac{\tau}{2}}]+\gamma\alpha V_0\Big[\frac{-\tau e^{-\gamma\frac{\tau}{2}}}{2\gamma}-\frac{e^{-\gamma\frac{\tau}{2}}}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2}\Big]-$$

$$-\gamma\alpha V_0\Big[\frac{-\tau e^{-\gamma\tau}}{\gamma}-\frac{e^{-\gamma\tau}}{\gamma^2}+\frac{\tau e^{-\gamma\frac{\tau}{2}}}{2\gamma}+\frac{e^{-\gamma\frac{\tau}{2}}}{\gamma^2}\Big]+\frac{1}{2}\gamma\alpha^2\Big[\frac{\tau^2}{4}+\tau^2-\frac{\tau^2}{4}\Big]+$$

$$+\frac{\gamma\alpha\tau V_0}{-\gamma}[e^{-\gamma\tau}-e^{-\gamma\frac{\tau}{2}}]-\gamma\alpha^2\tau\frac{\tau}{2}=$$

$$=\frac{\gamma V_0 y}{-\gamma}[e^{-\gamma\tau}-1]+\frac{\gamma\alpha^2}{2}\tau^2-\frac{\gamma\alpha^2}{2}\tau^2+$$

$$+\alpha V_0\Big[\frac{-\tau e^{-\gamma\frac{\tau}{2}}}{2}-\frac{e^{-\gamma\frac{\tau}{2}}}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}+\tau e^{-\gamma\tau}+\frac{e^{-\gamma\tau}}{\gamma}-\frac{\tau e^{-\gamma\frac{\tau}{2}}}{2}-\frac{e^{-\gamma\frac{\tau}{2}}}{\gamma}\Big]+$$

$$+\alpha V_0[-\tau e^{-\gamma\tau}+\tau e^{-\gamma\frac{\tau}{2}}]=$$

$$=-yV_0[e^{-\gamma\tau}-1]+\frac{\alpha V_0}{\gamma}[1+e^{-\gamma\tau}-2e^{-\gamma\frac{\tau}{2}}]$$

Теперь произведем вычитание результатов интегрирования, чтоб получить полное действие (проварьированное).

$$\frac{V_0^{\,2}(e^{-\gamma\tau}-1)}{(-4\gamma)}-\frac{\alpha V_0(e^{-\gamma\frac{\tau}{2}}-1)}{\gamma}+\frac{\alpha^2\tau}{2}+\frac{V_0^{\,2}(e^{-2\gamma\tau}-e^{-\gamma\tau})}{(-4\gamma)}+\frac{\alpha V_0(e^{-\gamma\tau}-e^{-\gamma\frac{\tau}{2}})}{\gamma}+$$

$$+yV_0(e^{-\gamma\tau}-1)-\frac{\alpha V_0}{\gamma}(1+e^{-\gamma\tau}-2e^{-\gamma\frac{\tau}{2}})=$$

$$=\frac{V_0^{\,2}(e^{-2\gamma\tau}-1)}{(-4\gamma)}+\frac{\alpha^2\tau}{2}+yV_0(e^{-\gamma\tau}-1)$$

Видно, что получился аналогичный результат – члены, пропорциональные первой степени параметра, сократились.

Теперь произведем варьирование действия в общем виде. Обращаю ваше внимание – и постановка задачи, и ход ее решения имеют отличия от вариантов, излагаемых в книгах по аналитической механике.

$$S_0=\int_{t_1}^{t_2}L(t,\vec r,\dot{\vec r}(t))dt$$

Здесь, в отличие от общепринятого определения действия в аналитической механике, $\vec r$ считается просто параметром (не зависящим от времени). Скорость же $\dot{\vec r}$ считается функцией времени (здесь все как обычно). Мы будем искать экстремум действия и по параметру-координате, и по функции-скорости. Но обращаю внимание на важные моменты:

1. Приращение (вариация) не зависящего от времени вектор-параметра $\vec r$ считается величиной, зависящей от времени.

2. Приращения скорости и параметра-координаты не являются независимыми друг от друга. Как же они связаны друг с другом? Самым естественным способом – вариация скорости есть производная по времени от вариации координаты.

Приращение координаты считаем обращающимся в нуль на границах интервала интегрирования (как обычно).

$$\delta\vec r(t_1)=\delta\vec r(t_2)=0$$

Вычислим вариацию действия.

$$\delta S_0=\int_{t_1}^{t_2}(\frac{\partial L}{\partial\vec r}\delta\vec r+\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec r}}\delta\dot{\vec r})dt$$

Это выражение зависит от вариаций координаты и скорости. Но эти вариации связаны друг с другом. Хотелось бы привести все к зависимости от вариации одного вида. Для этого поинтересуемся вопросом – чему равен дифференциал такой величины:

$$\frac{\partial L(\vec r,\dot{\vec r}(t),t)}{\partial\dot{\vec r}}\delta\vec r(t)=\vec R\delta\vec r(t)$$

Обращаю внимание - $\vec r$ есть параметр не зависящий от времени, так что при нахождении производной по времени от величины $\vec R$ (обобщенного импульса) дифференцировать по координате не нужно.

$$d(\frac{\partial L(\vec r,\dot{\vec r}(t),t)}{\partial\dot{\vec r}}\delta\vec r(t))=d(\vec R(\vec r,\dot{\vec r}(t),t)\delta\vec r(t))=\delta\vec r d\vec R+\vec R d\delta\vec r(t))=$$

$$=\delta\vec r\frac{\tilde d\vec R}{dt}dt+\vec R\frac{d\delta\vec r(t))}{dt}dt$$

Особый характер производной по времени от обобщенного импульса отмечен с помощью значка «тильда» над «d».

Так как только что записанный дифференциал тривиально интегрируется и обращается в ноль (так как вариация координаты обращается в ноль на концах интервала), можно записать:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\delta\dot{\vec{r}} = -\frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right)\delta\vec{r}$$

И выражение для вариации действия приобретает такой вид:

$$\delta S_0 = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\delta\vec{r} - \frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right)\delta\vec{r}\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\delta\vec{r} - \frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right)\right)\delta\vec{r}dt$$

Условием экстремальности действия (т.е. обращения вариации в ноль для любых приращений $\delta\vec{r}$) будет равенство нулю выражения в скобках:

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

От обычных уравнений Лагранжа полученные уравнения отличаются только значком «тильда» над производной по времени. Запишем аналитическое выражение для такой производной:

$$\frac{\tilde{d}(...)}{dt} = \frac{d(...)}{dt} - \left(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)(...)$$

На этом, пожалуй, все. С помощью таких обобщенных уравнений Лагранжа можно учесть диссипацию (как мы это уже фактически сделали – см. выше).

Список литературы:

1) Голдстейн «Классическая механика», М. «Наука» 1975
2) Ландау, Лифшиц «Механика», М. «Наука» 1988