Китаев А.Е.(kitaev_a_e@mail.ru)

О взаимосвязи вторичного квантования и нелинейности.

В этой работе мы попробуем исследовать гипотезу о том, что множественность частиц, соответствующих какому-либо виду поля в квантовой механике, может являться в какой-то мере нелинейным эффектом.

Эта тема уже поднималась в работе «К вопросу о вторичном квантовании (и спонтанном излучении)» (см. ее на сайте science-nighny.narod.ru), где были проведены параллели между нелинейным трехволновым взаимодействием для случая распада высокочастотной волны и спонтанным излучением. На самом деле, развивая эту тему, можно даже поставить задачу так, как ставил ее Гейзенберг при исследовании атомных систем. Допустим, у нас имеется множество нелинейных осцилляторов, колеблющихся, скажем, со звуковой частотой. Мы не будем интересоваться координатой или фазой каждого отдельного осциллятора, а будем «смотреть» на макроскопические в каком-то смысле величины, в данном случае на частоту излучаемого осцилляторами звука. Пусть сначала квадратичная нелинейность в осцилляторах выключена. Тогда мы фиксируем звук на частоте основного тона, возбуждаемый множеством осцилляторов. Потом в некоторый момент времени нелинейность (квадратичная) включается. Результатом будет появление звука на двойной частоте – второй гармоники. Было бы интересно рассмотреть теорию, в которой вычислялось бы развитие во времени процесса появления второй гармоники, и «за бортом» как ненаблюдаемые оставались бы, например, зависимости от времени координат отдельных осцилляторов.

К дальнейшим исследованиям нас подтолкнула мысль, выраженная в книге Блохинцева [1, стр.514], о том, что гамильтониан теории вторичного квантования можно получить, рассмотрев в начале классическое поле с взаимодействием различных элементов (фактически с кубичной нелинейностью).

Изложим сперва (кратко) результаты, которые получаются при решении нелинейного дифференциального уравнения. Рассмотрим ангармоничные колебания осциллятора с кубичной и квадратичной нелинейностью.

$$\ddot{x} + w^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3$$

В [2] можно посмотреть подробный вывод формулы для второй и третьей гармоники. Если в нулевом приближении колебание гармоническое

$$a\cos wt,$$

то выражение для второй гармоники выглядит так:

$$\frac{\alpha a^2}{6w^2}\cos 2wt$$

Для третьей гармоники (в случае равенства нулю коэффициента квадратичной нелинейности):

$$\frac{\beta a^3}{32w^2}\cos 3(w + \frac{3\beta a^2}{8w})t$$

(помимо третьей гармоники наблюдается сдвиг частоты колебаний).

Если искать нулевое приближение уравнения с квадратичной нелинейностью

$$\ddot{x} + w^2 x = \alpha x^2$$

не в косинусоидальном, а в экспоненциальном виде, то получим такое выражение для амплитуды второй гармоники:

$$-\frac{\alpha A^2}{3w^2}$$

Для кубичной же нелинейности

$$\ddot{x} + w^2 x = -\beta x^3$$

получаем амплитуду третьей гармоники

$$-\frac{\beta A^3}{8w^2}$$

Эти результаты можно получить, например, с помощью метода усреднения. Так как амплитуда при решении через экспоненты равна амплитуде косинусоидального решения, деленной на два, то эти результаты совпадают с формулами в книге [2].

Приступим теперь к обоснованию нашей гипотезы (см. начало работы). Основная идея – сопоставить нелинейному уравнению некоторое линейное, но для большего числа независимых переменных. Причем сопоставить таким образом, чтоб решения их каким-то образом соотносились друг с другом. Для простоты в данной работе мы будем иметь дело с уравнением осциллятора (т.е. обыкновенным дифференциальным уравнением), имеющим малую нелинейность второго или третьего порядка.

Начнем с нелинейности второго порядка.

$$\ddot{y} + w_0{}^2 y = -\mu y^2$$

Сопоставим этому уравнению такое линейное дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial t_2^2} + w_0{}^2 Y + \mu a \int \delta(t_2 - t_1) Y(t_1, t_2) dt_2 + \mu a \int \delta(t_2 - t_1) Y(t_1, t_2) dt_1 = 0$$

Здесь функция Y – это функция двух времен (t_1 и t_2). Таким образом, линейное уравнение для Y можно считать в какой-то мере уравнением для двух осцилляторов, каждый из которых движется в своем времени. Кроме того в состав этого уравнения входят интегральные операторы, которые можно считать проявлением своеобразной временной дисперсии.

Попробуем найти решения этого уравнения и исследовать – имеют ли они какое-то отношение к решениям нелинейной задачи.

Ищем решение в виде

$$Y = \sum_n \sum_k c(n,k) e^{inwt_1} e^{ikwt_2}$$

Подставляем:

$$\sum_n \sum_k c(n,k)[w_0^2 - (n^2 + k^2) w^2] e^{inwt_1} e^{ikwt_2} + a\mu \sum_n \sum_k c(n,k) e^{i(n+k)wt_1} + a\mu \sum_n \sum_k c(n,k) e^{i(n+k)wt_2} = 0$$

Домножим все на $e^{-in_0 wt_1} e^{-ik_0 wt_2}$

$$\sum_n \sum_k c(n,k)[w_0^2 - (n^2 + k^2) w^2] e^{i(n-n_0)wt_1} e^{i(k-k_0)wt_2} +$$
$$+ a\mu \sum_n \sum_k c(n,k) e^{i(n+k-n_0)wt_1} e^{-ik_0 wt_2} +$$
$$+ a\mu \sum_n \sum_k c(n,k) e^{i(n+k-k_0)wt_2} e^{-in_0 wt_1} = 0$$

Проинтегрируем теперь по t_1 и по t_2 (от минус-бесконечности до плюс-бесконечности). Получим

$$\sum_n \sum_k c(n,k)[w_0^2 - (n^2 + k^2) w^2] \delta_{n,n_0} \delta_{k,k_0} +$$
$$+ a\mu \sum_n \sum_k c(n,k) \delta_{n,n_0 - k} \delta_{0,k_0} +$$
$$+ a\mu \sum_n \sum_k c(n,k) \delta_{k,k_0 - n} \delta_{0,n_0} = 0$$

Произведем частичное суммирование (где оно легко производится):

$$c(n_0,k_0)[w_0^2-({n_0}^2+{k_0}^2)w^2]+$$
$$+a\mu\sum_k c(n_0-k,k)\delta_{0,k_0}+$$
$$+a\mu\sum_n c(n,k_0-n)\delta_{0,n_0}=0$$

Если $k_0=0,\quad n_0\neq 0$, третье слагаемое зануляется. Для этого случая

$$c(n_0,0)[w_0^2-{n_0}^2w^2]+$$
$$+a\mu\sum_k c(n_0-k,k)=0$$

Отсюда следует, что

$$c(n_0,0)=-\frac{a\mu\sum_k c(n_0-k,k)}{w_0^2-{n_0}^2w^2}$$

Если $\mu=0$ (нулевое приближение), то

$$c(n_0,0)[w_0^2-{n_0}^2w^2]=0$$
$$n_0=\pm 1$$

(остальные n_0 равны нулю).

$$w=\pm w_0$$

$$c^{(0)}(n_0,0)=C\begin{pmatrix}\dots\\0\\1\\0\\1\\0\\\dots\end{pmatrix}$$

Компоненты этого вектор-столбца нумеруются значением n_0.

В следующем приближении отлично от нуля лишь $n_0=\pm 2$. Кроме того полагаем w равным w_0.

$$c(2,0)=-\frac{a\mu\sum_k c(2-k,k)}{w_0^2-4{w_0}^2}=\frac{a\mu\sum_k c(2-k,k)}{3{w_0}^2}=\frac{a\mu c(2-1,1)}{3{w_0}^2}=\frac{a\mu c(1,1)}{3{w_0}^2}$$

Причем имеет смысл считать, что

$$c^{(1)}(1,1)=c^{(0)}(1,0)c^{(0)}(0,1)$$

Почему? Потому-что в нулевом приближении все коэффициенты С кроме этих равны нулю. Представление же С(1,1) в виде их произведения представляется вполне разумным, если вспомнить временную зависимость соответствующих функций.

Итак, мы получаем, что двухчастичное решение представляется в виде произведения двух одночастичных. Можно также записать, полагая амплитуды двухчастичных рещений равными (для обоснования этого привлечем постулат о неразличимости частиц, который принимают в теории вторичного квантования)

$$c^{(1)}(1,1)=\{c^{(0)}(1,0)\}^2$$

Таким образом

$$c(2,0)=\frac{a\mu\{c^{(0)}(1,0)\}^2}{3{w_0}^2}$$

то есть (с учетом различия в знаке нелинейности) мы получили значение, совпадающее с решением нелинейной задачи для амплитуды второй нелинейной гармоники (см. выше).

Заметим также, что коэффициент a (который мы с самого начала ввели на всякий случай) равен 1.

Таким образом получается, что c(2,0) – это вторая гармоника «одночастичного» решения, а c(1,0) – первая гармоника. Если считать уравнение для Y линейной моделью для нелинейной задачи, то выходит, что непосредственный физический смысл имеют подобные одночастичные решения. Двухчастичные решения c(n,k) появляются лишь в промежуточных выкладках.

Перейдем к нелинейности третьего порядка.

$$\ddot{y} + w_0{}^2 y = -\mu y^3$$

Сопоставим этому уравнению такое линейное дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2 Y(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 Y(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2 Y(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_3^2} + w_0{}^2 Y(t_1,t_2,t_3) +$$
$$+\mu a\int \delta(t_2-t_1)\int \delta(t_3-t_1) Y dt_2 dt_3 +$$
$$+\mu a\int \delta(t_1-t_2)\int \delta(t_3-t_2) Y dt_1 dt_3 +$$
$$+\mu a\int \delta(t_1-t_3)\int \delta(t_2-t_3) Y dt_1 dt_2 = 0$$

Здесь функция Y – это функция уже 3-х времен (t_1 , t_2 и t_3). Линейное уравнение для Y можно считать уравнением для трех осцилляторов, каждый из которых движется в своем времени.

Ищем решение в виде

$$Y = \sum_n \sum_k \sum_l c(n,k,l) e^{inwt_1} e^{ikwt_2} e^{ilwt_3}$$

Подставляем:

$$\sum_n \sum_k \sum_l c(n,k,l)[w_0^2 - (n^2+k^2+l^2)w^2] e^{inwt_1} e^{ikwt_2} e^{ilwt_3} +$$
$$+a\mu \sum_n \sum_k \sum_l c(n,k,l) e^{i(n+k+l)wt_1} +$$
$$+a\mu \sum_n \sum_k \sum_l c(n,k,l) e^{i(n+k+l)wt_2} +$$
$$+a\mu \sum_n \sum_k \sum_l c(n,k,l) e^{i(n+k+l)wt_3} = 0$$

Домножим все на $e^{-in_0wt_1} e^{-ik_0wt_2} e^{-il_0wt_3}$

$$\sum_n \sum_k \sum_l c(n,k)[w_0^2 - (n^2+k^2+l^2)w^2] e^{i(n-n_0)wt_1} e^{i(k-k_0)wt_2} e^{i(l-l_0)wt_3} +$$
$$+a\mu \sum_n \sum_k \sum_l c(n,k) e^{i(n-n_0+k+l)wt_1} e^{-ik_0wt_2} e^{-il_0wt_3} +$$
$$+\ldots = 0$$

Проинтегрируем теперь по 3-м временам

$$\sum_n \sum_k \sum_l c(n,k,l)[w_0^2 - (n^2+k^2+l^2)w^2] \delta_{n,n_0} \delta_{k,k_0} \delta_{l,l_0} +$$
$$+a\mu \sum_n \sum_k \sum_l c(n,k,l) \delta_{n,n_0-k-l} \delta_{0,k_0} \delta_{0,l_0} +$$
$$+\ldots = 0$$

Если $k_0 = 0, \quad l_0 = 0, \quad n_0 \neq 0$:

$$c(n_0,0,0)[w_0^2-n_0{}^2w^2]+$$
$$+a\mu\sum_k\sum_l\ c(n_0-k-l,k,l)=0$$

Отсюда следует, что

$$c(n_0,0,0)=-\frac{a\mu\sum_k\sum_l\ c(n_0-k-l,k,l)}{w_0^2-n_0{}^2w^2}$$

В нулевом приближении получаем тот же самый результат, что и раньше (для квадратичной нелинейности).

В следующем приближении $c(3,0,0)=-\frac{a\mu c(3-1-1,1,1)}{w_0^2-9w_0{}^2}=\frac{a\mu c(1,1,1)}{8w_0{}^2}$

Причем имеет смысл считать, что

$$c(1,1,1)=c^{(0)}(1,0,0)c^{(0)}(0,1,0)c^{(0)}(0,0,1)$$

Можно также записать (считая частицы неразличимыми)

$$c(1,1,1)=\{c^{(0)}(1,0,0)\}^3$$

Таким образом

$$c(3,0,0)=\frac{a\mu\{c^{(0)}(1,0,0)\}3}{8w_0{}^2}$$

то есть (с учетом различия в знаке нелинейности) мы получили значение, совпадающее с амплитудой третьей нелинейной гармоники.

Коэффициент a также равен 1.

Попробуем посмотреть, что будет в первом приближении с коэффициентом C(1,0,0) (то-есть попробуем учесть самовоздействие). То-есть, фактически, попробуем подобрать числа k,n,l так, чтобы в оба слагаемых входил коэффициент C(1,0,0).

$$(w_0{}^2-w^2)c(1,0,0)-a\mu c(1,1,-1)=0$$

(знак равенства здесь условен – смотри далее).

Отсюда

$$c(1,1,-1)=c(1,0,0)c(1,0,0)c^*(1,0,0)$$

$$(w_0{}^2-w^2)c-a\mu c\left|c\right|^2=0$$

$$(\quad c=c(1,0,0)\quad)$$

$$w_0{}^2-w^2=a\mu\left|c\right|^2$$

$$w=w_0\sqrt{1-a\mu\frac{\left|c\right|^2}{w_0{}^2}}$$

В сумме во втором слагаемом мы учли только один член C(1,1,-1). Но нужно еще учесть C(1,-1,1) и C(-1,1,1). За счет этого под знаком радикала (во втором слагаемом) появится тройка (чистая комбинаторика).

$$w=w_0\sqrt{1-a\mu\frac{3\left|c\right|^2}{w_0{}^2}}\approx w_0(1-a\mu\frac{3\left|c\right|^2}{2w_0{}^2})$$

Эта процедура описывает нелинейный сдвиг частоты осциллятора. Полученный результат также совпадает с результатом, следующим из нелинейной теории.

Итак, делаем вывод – если при наличии нелинейности рассмотреть не исходную нелинейную задачу, а линейную, но с «размноженным» числом переменных (соответствующим степени нелинейности), то мы можем получить такие же результаты для некоторых величин. Это «размноженное» число зависимых переменных фактически означает переход к многочастичной задаче. А учет неразличимости частиц, производимый на определенном этапе (см. выше) фактически соответствует переходу к вторичному квантованию.

Таким образом, исследуя поведение многочастичной системы с парными взаимодействиями частиц, можно попытаться говорить о некотором физическом поле с квадратичной нелинейностью. Более того, если учесть, например, что между уравнением Шредингера для электрона в двумерном потенциальном ящике и аналогичным уравнением для пары электронов в одномерном ящике фактически нет разницы (за исключением симметрии к перестановкам двух частиц), можно попробовать и трехмерность пространства «объяснить» нелинейностью третьего порядка в одномерном уравнении. Можно использовать и размерности, свернутые в кольцо (или каким-либо другим образом). Этот вопрос, конечно, требует дальнейшего исследования.

Список литературы:

1) Д.И.Блохинцев «Основы квантовой механики» М. “Наука” 1976.

2) Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц «Механика» М. «Наука» 1988.

3) А.Найфэ «Введение в методы возмущений» М. «Мир» 1984.