Китаев А.Е.(kitaev_a_e@mail.ru)

Модификация уравнения непрерывности.

Как известно, физический смысл уравнения непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\ \vec{j} = 0$$

состоит в том, что количество заряда в данном объеме может измениться лишь посредством прохождения части заряда через границу этого объема.

Приведем некоторые качественные рассуждения, пользуясь известными сведениями из квантовой физики. Как известно, электрон и позитрон при столкновении друг с другом (то-есть при сближении на нулевое расстояние) аннигилируют, превращаясь в кванты электромагнитного излучения. Имеет место и обратный процесс. Из кванта электромагнитного излучения, находящегося рядом с каким-либо массивным объектом (ядром) может получиться пара частиц с противоположным зарядом – электрон и позитрон. Вопрос состоит в том – на каком расстоянии друг от друга рождаются эти частицы? Если на нулевом, то что им мешает моментально аннигилировать и опять превратиться в электромагнитное излучение? Если не на нулевом, это означает, что моментально возникла пара противоположно заряженных частиц, находящихся на конечном (ненулевом) расстоянии друг от друга. При этом можно рассмотреть два непересекающихся объема, каждый из которых включает одну из рожденных частиц. В каждом из этих двух объемов появился заряд, не пройдя через его границу.

Разумеется, эти качественные рассуждения легко отмести, апеллируя к соотношению неопределенностей. Хотя по сути даже в квантовой теории (как и в классической) мы по-прежнему имеем дело с точечным электроном.

Перейдем теперь к математическим выкладкам, используя уравнение Дирака, записанное с использованием двухкомпонентных матриц [1,2]

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (F - m_0c^2)\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = c(\vec{\sigma}\vec{P})\begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \\ (F + m_0c^2)\begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = c(\vec{\sigma}\vec{P})\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

где

$$F = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi$$

$$\vec{P} = -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A}$$

При этом уравнение непрерывности, следующее из уравнения Дирака, запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial t}e(\varphi^*\varphi + \chi^*\chi) = -\nabla ec(\varphi^*\vec{\sigma}\chi + \chi^*\vec{\sigma}\varphi)$$

Заряд при этом выражается так:

$$\rho = e(\varphi^*\varphi + \chi^*\chi) = e(\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4)$$

Ясно, что это выражение для заряда находится в вопиющем противоречии с опытом, если считать, что наряду с электронами уравнение Дирака должно описывать и позитроны. Для того, чтобы избавиться от этого противоречия прибегают дополнительным ухищрениям (электронное море Дирака, «дырки», вторичное квантование).

Выдвинем гипотезу – заряд (назовем его истинным) должен выражаться так:

$$\rho_t = e(\varphi^*\varphi - \chi^*\chi) = e(\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 - \psi_3^*\psi_3 - \psi_4^*\psi_4)$$

Вычтем из обеих частей уравнения непрерывности, следующего из уравнения Дирака, величину

$$2e\frac{\partial}{\partial t}(\chi^*\chi)$$

Получим

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = -\nabla\vec{j} - 2e\frac{\partial}{\partial t}(\chi^*\chi) = -\nabla\vec{j} - G$$

Здесь в левой части стоит производная по времени от истинного (знакопеременного) заряда. Итак, идея дальнейших выкладок такова – будем считать, что в «измененное» уравнение непрерывности входит не обычный, дираковский, а истинный (знакопеременный) заряд. Ток же – обычный. Наша задача – вычислить «добавку» G.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\chi^*\chi) = \frac{\partial \chi^*}{\partial t}\chi + \chi^*\frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Из уравнения Дирака следует

$$(F + m_0c^2)\chi = c(\vec{\sigma}\vec{P})\varphi$$

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi + m_0c^2)\chi = c(\vec{\sigma}\vec{P})\varphi$$

Домножим все на $-\frac{i}{\hbar}$:

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}e\Phi - \frac{im_0c^2}{\hbar})\chi = -\frac{ic}{\hbar}(\vec{\sigma}\vec{P})\varphi$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = (-\frac{i}{\hbar}e\Phi + \frac{im_0c^2}{\hbar})\chi - \frac{ic}{\hbar}(\vec{\sigma}\vec{P})\varphi$$

Итак, второе слагаемое

$$\chi^*\frac{\partial \chi}{\partial t} = \chi^*(-\frac{i}{\hbar}e\Phi + \frac{im_0c^2}{\hbar})\chi - \frac{ic}{\hbar}\chi^*(\vec{\sigma}\vec{P})\varphi$$

Чему равняется $\frac{\partial \chi^*}{\partial t}$?

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial t} = (\frac{i}{\hbar}e\Phi - \frac{im_0c^2}{\hbar})\chi^* + \frac{ic}{\hbar}((\vec{P}^*\varphi^*)\vec{\sigma})$$

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial t}\chi = (\frac{i}{\hbar}e\Phi - \frac{im_0c^2}{\hbar})\chi^*\chi + \frac{ic}{\hbar}((\vec{P}^*\varphi^*)\vec{\sigma})\chi$$

Сложим эти две величины

$$\chi^* \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi^*}{\partial t}\chi =$$

$$= (-\frac{i}{\hbar}e\Phi + \frac{im_0c^2}{\hbar})\chi^*\chi - \frac{ic}{\hbar}\chi^*(\vec{\sigma}\vec{P})\varphi +$$

$$+(\frac{i}{\hbar}e\Phi - \frac{im_0c^2}{\hbar})\chi^*\chi + \frac{ic}{\hbar}((\vec{P}^*\varphi^*)\vec{\sigma})\chi =$$

$$= \frac{ic}{\hbar}((\vec{P}^*\varphi^*)\vec{\sigma}\chi - \chi^*(\vec{\sigma}\vec{P})\varphi) = \frac{G}{2e}$$

Далее:

$$\frac{G}{2e} = \frac{ic}{\hbar}((i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A}^*)\varphi^*\vec{\sigma}\chi - \chi^*\vec{\sigma}(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A})\varphi) =$$

$$= \frac{ic}{\hbar}[i\hbar(\nabla\varphi^*\vec{\sigma})\chi - \frac{e}{c}(\vec{A}^*\varphi^*\vec{\sigma})\chi - (-i\hbar)\chi^*(\vec{\sigma}\nabla\varphi) + \chi^*(\vec{\sigma}\frac{e}{c}\vec{A})\varphi] =$$

$$= -c\{(\nabla\varphi^*\vec{\sigma})\chi + \chi^*(\vec{\sigma}\nabla\varphi)\} +$$

$$+\frac{ie}{\hbar}\{\chi^*(\vec{\sigma}\vec{A})\varphi - \varphi^*(\vec{A}^*\vec{\sigma})\chi\}$$

Теперь учтем, что в нерелятивистском приближении (см. [2])

$$\chi = -\frac{i\hbar}{2m_0c}\vec{\sigma}\nabla\varphi$$

$$\chi^* = \frac{i\hbar}{2m_0c}\nabla\varphi^*\vec{\sigma}$$

$$\frac{G}{2e} =$$

$$= -c\{(\nabla\varphi^*\vec{\sigma})\vec{\sigma}\nabla\varphi(-\frac{i\hbar}{2m_0c}) + \frac{i\hbar}{2m_0c}\nabla\varphi^*\vec{\sigma}(\vec{\sigma}\nabla\varphi)\} +$$

$$+\frac{ie}{\hbar}\{\frac{i\hbar}{2m_0c}\nabla\varphi^*\vec{\sigma}(\vec{\sigma}\vec{A})\varphi - \varphi^*(\vec{A}^*\vec{\sigma})\vec{\sigma}\nabla\varphi(-\frac{i\hbar}{2m_0c})\} =$$

$$= \frac{i\hbar}{2m_0}\{(\nabla\varphi^*\vec{\sigma})\vec{\sigma}\nabla\varphi - \nabla\varphi^*\vec{\sigma}(\vec{\sigma}\nabla\varphi)\} - \frac{e}{2m_0c}\{\nabla\varphi^*\vec{\sigma}(\vec{\sigma}\vec{A})\varphi + \varphi^*(\vec{A}^*\vec{\sigma})\vec{\sigma}\nabla\varphi\} =$$

$$= -\frac{e}{2m_0c}\{\nabla\varphi^*\vec{\sigma}(\vec{\sigma}\vec{A})\varphi + \varphi^*(\vec{A}^*\vec{\sigma})\vec{\sigma}\nabla\varphi\}$$

Далее используем формулу

$$(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = \vec{a}\vec{b} + i\vec{\sigma}[\vec{a}\vec{b}]$$

Также будем считать вектор-потенциал электромагнитного поля чисто действительным.

Получаем:

$$\frac{G}{2e}=-\frac{e}{2m_0c}\{\nabla\varphi^*\vec{A}\varphi+\varphi^*\vec{A}\nabla\varphi+i\vec{\sigma}[\nabla\varphi^*\vec{A}]\varphi+i\varphi^*\vec{\sigma}[\vec{A}\nabla\varphi]\}=$$

$$=-\frac{e}{2m_0c}\{\vec{A}(\nabla\varphi^*\varphi+\varphi^*\nabla\varphi)+i(\vec{\sigma}[\nabla\varphi^*\vec{A}]\varphi+\varphi^*\vec{\sigma}[\vec{A}\nabla\varphi])\}$$

$$G=-\frac{e^2}{m_0c}\{\vec{A}(\nabla\varphi^*\varphi+\varphi^*\nabla\varphi)+i(\vec{\sigma}[\nabla\varphi^*\vec{A}]\varphi+\varphi^*\vec{\sigma}[\vec{A}\nabla\varphi])\}$$

Если перейти от градиента к оператору импульса, то получится

$$\nabla=-\frac{\hat{\vec{p}}}{i\hbar}$$

$$G=\frac{e^2}{im_0\hbar c}\{\vec{A}((\hat{\vec{p}}\varphi^*)\varphi+\varphi^*(\hat{\vec{p}}\varphi))+i(\vec{\sigma}[(\hat{\vec{p}}\varphi^*)\vec{A}]\varphi+\varphi^*\vec{\sigma}[\vec{A}(\hat{\vec{p}}\varphi)])\}=$$

$$=\frac{e^2}{im_0\hbar c}\{\vec{A}(-(\hat{\vec{p}}^*\varphi^*)\varphi+\varphi^*(\hat{\vec{p}}\varphi))+i(-\vec{\sigma}[(\hat{\vec{p}}^*\varphi^*)\vec{A}]\varphi+\varphi^*\vec{\sigma}[\vec{A}(\hat{\vec{p}}\varphi)])\}$$

Заметим, что множитель при G в последнем выражении пропорционален постоянной тонкой структуры, деленной на массу электрона.

Также можно записать (через плотность заряда одного знака)

$$G=-\frac{e^2}{m_0c}\{\vec{A}\nabla(\varphi^*\varphi)+i(\vec{\sigma}[\nabla\varphi^*\vec{A}]\varphi+\varphi^*\vec{\sigma}[\vec{A}\nabla\varphi])\}$$

Итак, в случае малых значений вектор-потенциала (и, следовательно, тока) и малых градиентов волновой функции электрона можно считать G=0. То-есть уравнение непрерывности выполняется не только для дираковского заряда, но и для истинного (знакопеременного).

В общем же случае

$$\frac{\partial\rho_t}{\partial t}+\nabla\vec{j}\neq 0$$

$$\frac{\partial\rho_t}{\partial t}+\nabla\vec{j}=-G$$

$$\frac{\partial\rho_t}{\partial t}+\nabla\vec{j}=\frac{e^2}{m_0c}\{\vec{A}\nabla(\varphi^*\varphi)+i(\vec{\sigma}[\nabla\varphi^*\vec{A}]\varphi+\varphi^*\vec{\sigma}[\vec{A}\nabla\varphi])\}$$

Последняя формула, напомню, относится к нерелятивистскому случаю.

Теперь обратимся к уравнениям для потенциалов электромагнитного поля.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi-\Delta\Phi=4\pi\rho$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}-\Delta\vec{A}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Или

$$D\Phi = 4\pi\rho$$

$$D\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

где

$$D = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

Если на первое уравнение подействовать оператором $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$,

а на второе – оператором div, после чего сложить их, получим:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}D\Phi + divD\vec{A} = \frac{4\pi}{c}(\frac{\partial}{\partial t}\rho + div\vec{j})$$

Или

$$D(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi + div\vec{A}) = \frac{4\pi}{c}(\frac{\partial}{\partial t}\rho + div\vec{j})$$

Если правая часть равна нулю в силу уравнения непрерывности, то сразу получаем условие, связывающее скалярный и векторный потенциалы (так называемую калибровку Лоренца)

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi + div\vec{A} = 0$$

Для перехода от уравнения для скалярного потенциала к одному из уравнений Максвелла (дивергентному, для электрического поля) удобно использовать соотношение, с помощью которого электрическое поле выражается через потенциалы.

$$grad\Phi = -\vec{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Подставим это в уравнение для скалярного потенциала, учитывая, что $\Delta = div\ grad$,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi - div(-\vec{E} - \frac{1}{2}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) = 4\pi\rho$$

$$div\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi + div\vec{A}) = 4\pi\rho$$

Теперь, используя калибровку Лоренца (т.е. приравнивая нулю выражение в скобках), сразу получаем одно из уравнений Максвелла. Из него, кстати, следует поперечность электромагнитных волн в вакууме. Для этого нужно приравнять заряд нулю (случай вакуума) и принять электрическое поле пропорциональным бегущей волне:

$$\vec{E} \sim e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

Если считать, что источником в уравнении для скалярного потенциала служит не дираковский заряд, а тот, который мы в предыдущих выкладках назвали «истинным», то эта цепочка рассуждений сразу нарушается. Уравнение непрерывности не выполняется, значит не выполняется калибровка Лоренца, значит не выполняется и уравнение

$$div\vec{E} = 4\pi\rho$$

(точнее выполняется лишь в пределе малых скоростей заряда и малых градиентов заряда).

Значит, в случае невыполнения уравнения непрерывности для «истинного» заряда есть надежда обнаружить продольные электромагнитные волны.

Уравнения для потенциалов при таком подходе являются более фундаментальными, чем уравнения Максвелла (что соотносится с квантовой механикой, где именно потенциалы входят в уравнения Шредингера и Дирака). Нельзя не отметить, что система уравнений для потенциалов является более стройной с математической точки зрения, так как четырем неизвестным функциям соответствуют четыре дифференциальных уравнения. В отличие от уравнений Максвелла, где шести неизвестным функциям соответствуют не шесть, а восемь уравнений (эта «неувязка», кстати, обычно никак не комментируется в книгах по теории электромагнитного поля).

Здесь не будет выводиться обобщенный аналог дивергентного уравнения Максвелла и более точный аналог уравнения непрерывности. Отметим лишь, что (как считается в современной квантовой физике – см.[3]) в сильных электрических полях может происходить интенсивный процесс рождения электронно-позитронных пар из вакуума. Именно в этой ситуации ожидается нарушение уравнения непрерывности в его обычной (общепринятой) форме. Уточним также, что сомнений в законе сохранения электрического заряда нет.

Список литературы:

1)А.А.Соколов, Ю.М.Лоскутов, И.М.Тернов «Квантовая механика» М. “Просвещение” 1965.
2)А. С. Давыдов “Квантовая механика” М. “Наука” 1973.
3)А.А, Соколов, И.М,Тернов «Релятивистский электрон» М. «Наука», 1983.