Китаев А.Е. (E-mail: kitaev_a_e@mail.ru)

К вопросу о вторичном квантовании (и спонтанном излучении).

Попробуем рассмотреть физический смысл вторичного квантования (я уже обращался к этому вопросу в работе «Нелинейные системы и вторичное квантование», помещенной на сайте science-nighny.narod.ru). Результат «первичного» квантования легко себе представить. Это некоторое волновое поле. Что же представляет из себя поле, проквантованное еще раз? Это представить тяжело. Обычно прибегают к такому приему. Волновое поле представляют в виде суммы пространственных мод. Причем монохроматических мод, каждая имеет частоту w. Амплитуда каждой моды зависит от времени и подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению – уравнению осциллятора. И это уравнение мы квантуем. Таким образом поле одной моды с частотой w представляется в виде набора квантов.Если квантов ноль, значит имеем «нулевые колебания вакуума» для этой моды (с энергией $\hbar w/2$), если квант один – значит к этому «нулевому», но не равному нулю уровню добавляется энергия, равная $\hbar w$, если два кванта – добавляется еще одна такая порция и так далее. Это еще можно, правда с трудом, себе представить.

Но пусть мы имеем некоторый волновой импульс (то-есть пакет), ограниченный и в пространстве, и во времени. Этот импульс можно представить в виде интеграла Фурье – разложить по модам. Тогда некоторые монохроматические моды-компоненты будут иметь ничтожно малую амплитуду и, соответственно, энергию. Как это совместить с квантованием энергии такой моды и с существованием минимальной энергии – не очень понятно.

Далее попытаемся рассмотреть проблему на как можно более простом примере. Часто рассмотрение применений вторичноквантованного электромагнитного поля начинают со спонтанного излучения. Система такова – два энергетических уровня атома, на которых может находиться электрон, и электромагнитное поле, с которым этот электрон взаимодействует. Каково поведение этой системы? Коротко - один из основных эффектов такой: если электрон находится на верхнем уровне, он вероятно самопроизвольно «спрыгнет» с него на нижний, излучив квант света.

Есть ли классические системы, ведущие себя подобным образом? Приведем такой пример системы – три нелинейных осциллятора с квадратичной нелинейностью, связанные друг с другом (связь нелинейная). Пусть $w_1=w_2+w_3$. При этом, если проводить аналогии, два осциллятора с частотами w_1 и w_2 соответствуют двум энергетическим уровням электрона в атоме. Осциллятор же с частотой w_3 соответствует электромагнитному полю. В чем похожесть поведения? Если в начальный момент времени колеблется лишь осциллятор с наибольшей частотой, эта ситуация является неустойчивой. Энергия, как говорят, перетечет к двум другим осцилляторам. Или можно выразиться так – высокочастотная мода распадется на две низкочастотных.

Система описывается такими уравнениями

$$\begin{cases} x_1'' + w_1 x_1 = \mu(a_{111}x_1^2 + a_{112}x_1x_2 + a_{113}x_1x_3 + a_{123}x_2x_3 + a_{122}x_2^2 + a_{133}x_3^2) \\ x_2'' + w_2 x_2 = \mu(a_{211}x_1^2 + a_{212}x_1x_2 + a_{213}x_1x_3 + a_{223}x_2x_3 + a_{222}x_2^2 + a_{233}x_3^2) \\ x_3'' + w_3 x_3 = \mu(a_{311}x_1^2 + a_{312}x_1x_2 + a_{313}x_1x_3 + a_{323}x_2x_3 + a_{322}x_2^2 + a_{333}x_3^2) \end{cases}$$

Рассмотрение подобной системы и ее приближенное решение (обычно с помощью метода усреднения) можно найти в книгах по нелинейной теории колебании, например М.И.Рабинович, Д.И.Трубецков «Введение в теорию колебаний и волн».

Запишем еще уравнение Шредингера из задачи действия электромагнитного поля на электрон в атоме (результатом рассмотрения этой задачи является выражение для диэлектрической проницаемости) и уравнение для скалярного потенциала электромагнитного поля.

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}\psi - H\psi = e\varphi\psi \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - \Delta\varphi = 4\pi e\psi\psi^* \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\psi - \dfrac{H}{i\hbar}\psi - \dfrac{e}{i\hbar}\varphi\psi = 0 \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - \Delta\varphi = 4\pi e\psi\psi^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\psi + i\dfrac{E_0}{\hbar}\psi + i\dfrac{e}{\hbar}\varphi\psi = 0 \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - c^2\Delta\varphi = 4\pi c^2 e\psi\psi^* \end{cases}$$

Заметим, что явно просматривается нелинейность задачи, если потенциал поля не считать заданным заранее.

Вернемся к системе из трех связанных нелинейных осцилляторов. Предыдущую систему уравнений мы привели для того, чтобы несколько «адаптировать» уравнения этих осцилляторов к описанию взаимодействия двух энергетических уровней и поля.

Запишем такие уравнения:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 + iw_1\psi_1 = i\alpha_{11}\varphi\psi_1 + i\alpha_{12}\varphi\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 + iw_2\psi_2 = i\alpha_{21}\varphi\psi_1 + i\alpha_{22}\varphi\psi_2 \\ \ddot{\varphi} + {w_0}^2\varphi = \mu(\psi_1+\psi_2)(\psi_1+\psi_2)^* \end{cases}$$

Пусть

$$\alpha_{ij} = \varepsilon\beta_{ij}$$

$$\mu = \varepsilon\eta$$

ε - малый параметр.

Заметим, что первые два уравнения здесь являются уравнениями первого порядка (в отличие от системы для трех осцилляторов, приведенной в начале работы).

Третье уравнение мы далее будем называть «уравнением для нулевого осциллятора» (так как в нем частота имеет индекс 0).

1. Первый путь рассмотрения задачи как нелинейной (через метод усреднения).

Приступаем к первому пути решения.

Будем считать, что

$$\psi_1 = S_1(\varepsilon t)e^{-iw_1t}$$

$$\dot{\psi}_1 = \frac{dS_1}{d(\varepsilon t)}\varepsilon e^{-iw_1t} + (-iw_1)S_1e^{-iw_1t}$$

$$\psi_2 = S_2(\varepsilon t)e^{-iw_2t}$$

$$\dot{\psi}_2 = \frac{dS_2}{d(\varepsilon t)}\varepsilon e^{-iw_2t} + (-iw_2)S_2e^{-iw_2t}$$

$$\varphi = \Phi(\varepsilon t)e^{iw_0t} + \Phi^*(\varepsilon t)e^{-iw_0t} = \Phi(\varepsilon t)e^{iw_0t} + k.c.$$

$$\ddot{\varphi} \approx [2\varepsilon w_0\frac{d\Phi}{d(\varepsilon t)}ie^{iw_0t} + k.c.] + [(-{w_0}^2\Phi e^{iw_0t}) + k.c.]$$

То-есть фактически мы используем метод усреднения (или метод Ван-дер-Поля). S – это медленно меняющаяся амплитуда.

Подставляем все это в уравнения нашей системы.

$$\varepsilon \frac{dS_1}{d(\varepsilon t)} e^{-iw_1 t} = i\varepsilon\beta_{11}(\Phi(\varepsilon t)e^{iw_0 t} + \Phi^*(\varepsilon t)e^{-iw_0 t})S_1(\varepsilon t)e^{-iw_1 t} +$$

$$+i\varepsilon\beta_{12}(\Phi(\varepsilon t)e^{iw_0 t} + \Phi^*(\varepsilon t)e^{-iw_0 t})S_2(\varepsilon t)e^{-iw_2 t}$$

$$\varepsilon \frac{dS_2}{d(\varepsilon t)} e^{-iw_2 t} = i\varepsilon\beta_{21}(\Phi(\varepsilon t)e^{iw_0 t} + \Phi^*(\varepsilon t)e^{-iw_0 t})S_1(\varepsilon t)e^{-iw_1 t} +$$

$$+i\varepsilon\beta_{22}(\Phi(\varepsilon t)e^{iw_0 t} + \Phi^*(\varepsilon t)e^{-iw_0 t})S_2(\varepsilon t)e^{-iw_2 t}$$

$$2\varepsilon w_0 \frac{d\Phi}{d(\varepsilon t)} ie^{iw_0 t} - 2\varepsilon w_0 \frac{d\Phi^*}{d(\varepsilon t)} ie^{-iw_0 t} = \varepsilon\eta(S_1 S_1^* + S_2 S_1^* e^{-iw_2 t} e^{iw_1 t} +$$

$$+S_1 S_2^* e^{-iw_1 t} e^{iw_2 t} + S_2 S_2^*)$$

Пусть выполняются условия резонанса:

$$w_0 = w_1 - w_2$$

$$w_1 = w_0 + w_2$$

Тогда, оставляя лишь резонансные члены, получаем:

$$\frac{dS_1}{d(\varepsilon t)} = i\beta_{12}\Phi^* S_2$$

$$\frac{dS_2}{d(\varepsilon t)} = i\beta_{21}\Phi S_1$$

$$2iw_0 \frac{d\Phi}{d(\varepsilon t)} = \eta S_2 S_1^*$$

Домножим на ε (малый параметр):

$$\frac{dS_1}{dt} = i\alpha_{12}\Phi^* S_2$$

$$\frac{dS_2}{dt} = i\alpha_{21}\Phi S_1$$

$$2iw_0 \frac{d\Phi}{dt} = \mu S_2 S_1^*$$

Пусть в начальный момент времени вся энергия сосредоточена в колебании осциллятора с частотой w_1. Осцилляторы же с частотами w_0 и w_2 практически неподвижны.

То-есть S_1 – велико (считаем const). S_2 и Φ – малы.

$$\dot{S}_2 = i\alpha_{21}\Phi S_1$$

$$\dot{\Phi} = \frac{\mu}{2iw_0} S_2 S_1^*$$

1-е уравнение дифференцируем.

$$\ddot{S}_2 = i\alpha_{21}\dot{\Phi} S_1$$

Подставляем из 2-го:

$$\ddot{S}_2 = i\alpha_{21}\frac{\mu}{2iw_0} S_2 S_1^* S_1$$

$$\ddot{S}_2 = \frac{\alpha_{21}\mu}{2w_0}(S_1^* S_1)S_2 = \frac{\alpha_{21}\mu}{2w_0}|S_1|^2 S_2$$

Решение естественно искать в виде

$$S_2 = Ae^{pt}$$

После подставления получаем

$$p = \pm \frac{\sqrt{\alpha_{21}\mu}}{\sqrt{2w_0}}|S_1|$$

$$S_2 = Ae^{\pm \frac{\sqrt{\alpha_{21}\mu}}{\sqrt{2w_0}}|S_1|t}$$

Получаем экспоненциальный рост амплитуды колебаний 2-го осциллятора. Растет и амплитуда 0-го осциллятора (это есть аналог поля). Таким образом энергия колебаний 1-го осциллятора начинает «перекачиваться» в колебания 2-го (и 0-го).

При малых значениях t

$$S_2 \approx A(1 + \frac{\sqrt{\alpha_{21}\mu}}{\sqrt{2w_0}}|S_1|t)$$

$$\frac{dS_2}{dt} \approx \frac{\sqrt{\alpha_{21}\mu}}{\sqrt{2w_0}}|S_1|$$

А исходная функция

$$\Psi_2 \approx A(1 + \frac{\sqrt{\alpha_{21}\mu}}{\sqrt{2w_0}}|S_1|t)e^{-iw_2t}$$

Итак, получается вполне разумный результат, аналогичный случаю полных уравнений для трех связанных нелинейных осцилляторов – высокочастотная мода распадается на две низкочастотных.

2. Второй путь рассмотрения задачи – уже как линейной (через вторичное квантование).

Теперь попробуем другой метод решения исходной системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 + iw_1\psi_1 = i\alpha_{11}\varphi\psi_1 + i\alpha_{12}\varphi\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 + iw_2\psi_2 = i\alpha_{21}\varphi\psi_1 + i\alpha_{22}\varphi\psi_2 \\ \ddot{\varphi} + {w_0}^2\varphi = \mu(\psi_1 + \psi_2)(\psi_1 + \psi_2)^* \end{cases}$$

Наибольшее внимание мы будем уделять первым двум уравнениям. Нелинейная правая часть третьего уравнения как бы окажется «в тени».

Частоты w пока любые, они еще не связаны никакими соотношениями (соотношения для нелинейного метода смотри выше).

Ход решения в общих чертах соответствует рассмотрению задачи про спонтанное излучение в книгах по квантовой механике (см. например А.А.Соколов, Ю.М.Лоскутов, И.М.Тернов «Квантовая механика»). Только исходная система максимально упрощена. Я постараюсь сохранить такие же обозначения величин в формулах, как в квантовой механике (насколько это возможно). Поэтому обозначения в первом и втором методах решения задачи будут несколько различаться.

Если бы

$\alpha_{ij} = 0$,

то тогда решение имело бы простой вид:

$$\Psi_1 = C_1 e^{-iw_1t}$$

$$\Psi_2 = C_2 e^{-iw_2t}$$

где C1 и C2 – константы. Пусть теперь

$\alpha_{ij} \neq 0$, но малые.

Будем искать решение в виде

$$\Psi_1 = C_1(t)e^{-iw_1 t}$$
$$\Psi_2 = C_2(t)e^{-iw_2 t}$$

Вычислим производные этих функций:

$$\dot{\Psi}_1^{(0)} = \dot{C}_1(t)e^{-iw_1 t} - iw_1 C_1(t)e^{-iw_1 t}$$
$$\dot{\Psi}_2^{(0)} = \dot{C}_2(t)e^{-iw_2 t} - iw_2 C_2(t)e^{-iw_2 t}$$

Подставляем в уравнения:

$$\dot{C}_1(t)e^{-iw_1 t} - iw_1 C_1(t)e^{-iw_1 t} + iw_1 C_1(t)e^{-iw_1 t} = \varphi(i\alpha_{11}C_1(t)e^{-iw_1 t} + i\alpha_{12}C_2(t)e^{-iw_2 t})$$
$$\dot{C}_2(t)e^{-iw_2 t} - iw_2 C_2(t)e^{-iw_2 t} + iw_2 C_2(t)e^{-iw_2 t} = \varphi(i\alpha_{21}C_1(t)e^{-iw_1 t} + i\alpha_{22}C_2(t)e^{-iw_2 t})$$

Или, деля на экспоненты:

$$\dot{C}_1 = \varphi(i\alpha_{11}C_1 + i\alpha_{12}C_2 e^{i(w_1 - w_2)t})$$
$$\dot{C}_2 = \varphi(i\alpha_{21}C_1 e^{i(w_2 - w_1)t} + i\alpha_{22}C_2)$$

Теперь применим метод возмущений.

0-е приближение:

$$\alpha_{ij} = 0$$
$$\dot{C}_1^{(0)} = 0$$
$$\dot{C}_2^{(0)} = 0$$

Следовательно,

$$C_1^{(0)} = const = B_{10}$$
$$C_2^{(0)} = const = B_{20}$$

1-е приближение. Подставляем эти константы в правую часть:

$$\dot{C}_1 = i\alpha_{11}\varphi B_{10} + i\alpha_{12}\varphi B_{20}e^{i(w_1 - w_2)t}$$
$$\dot{C}_2 = i\alpha_{21}\varphi B_{10}e^{i(w_2 - w_1)t} + i\alpha_{22}\varphi B_{20}$$

Отсюда

$$C_1 = i\alpha_{11}B_{10}\int \varphi dt + i\alpha_{12}B_{20}\int \varphi e^{i(w_1 - w_2)t}dt$$
$$C_2 = i\alpha_{21}B_{10}\int \varphi e^{i(w_2 - w_1)t}dt + i\alpha_{22}B_{20}\int \varphi dt$$

Учтем, что φ можно представить в виде

$$\varphi = F_1 e^{iw_0 t} + F_1^* e^{-iw_0 t},$$

а можно, используя так называемые «нормальные» координаты, представить в несколько другом виде:

$$\varphi = \frac{a^*(t) + a(t)}{\sqrt{2w_0}},$$
$$a(t) = ae^{-iw_0 t},$$
$$a^*(t) = a^* e^{iw_0 t}$$

Что представляют из себя величины a и a*? Пока будем считать их просто константами.

Члены с α_{11} и α_{22} отбрасываем (они не приведут к резонансу – смотри далее). Перепишем наши соотношения с учетом всего этого:

$$C_1 = \frac{i\alpha_{12}B_{20}}{\sqrt{2w_0}}\int (a^* e^{iw_0 t} + a e^{-iw_0 t}) e^{i(w_1 - w_2)t} dt$$

$$C_2 = \frac{i\alpha_{21}B_{10}}{\sqrt{2w_0}}\int (a^* e^{iw_0 t} + a e^{-iw_0 t}) e^{i(w_2 - w_1)t} dt$$

Теперь, так же,как и в первом методе, будем считать, что частоты w не любые, а подчиняются такому соотношению:

$$w_0 \approx w_1 - w_2$$

$$w_1 \approx w_0 + w_2$$

Соотношения, как видно, аналогичны тем, которые использовались в нелинейном подходе. Обозначим еще:

$$w_1 - w_2 = w_{12}$$

$$w_2 - w_1 = w_{21} = -w_{12}$$

Далее здесь мы сделаем один важный шаг. Мы сочтем, что величины a, a^* мы имеем право вынести за знак интегрирования, как если бы они были константами (до сих мы , вообще говоря, и считаем их константами). Это окончательно разделит нас с нелинейным подходом. Там, как мы помним, аналогичные величины были слабо зависящими от времени амплитудами (выносить их за знак интегрирования в этом случае нельзя).

Тогда

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2w_0}} i\alpha_{12}B_{20}a^* \int e^{i(w_0 + w_{12})t} dt + \frac{1}{\sqrt{2w_0}} i\alpha_{12}B_{20}a \int e^{i(w_{12} - w_0)t} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2w_0}} i\alpha_{12}B_{20}a^* \left.\frac{e^{i(w_0+w_{12})\tau}}{i(w_0 + w_{12})}\right|_{t_0 = 0}^{t} + \frac{1}{\sqrt{2w_0}} i\alpha_{12}B_{20}a \left.\frac{e^{i(w_{12}-w_0)\tau}}{i(w_{12} - w_0)}\right|_{t_0 = 0}^{t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2w_0}} i\alpha_{12}B_{20}a^* \frac{e^{i(w_0+w_{12})t} - 1}{i(w_0 + w_{12})} + \frac{1}{\sqrt{2w_0}} i\alpha_{12}B_{20}a \frac{e^{i(w_{12}-w_0)t} - 1}{i(w_{12} - w_0)}$$

С учетом наших условий резонанса $w_{12} \approx w_0$ остается только 2-е слагаемое

$$C_1 \approx \frac{1}{\sqrt{2w_0}} \alpha_{12}B_{20}a \frac{e^{i(w_{12}-w_0)t} - 1}{(w_{12} - w_0)}$$

Комплексно сопряженная величина будет равна:

$$C_1^* \approx \frac{1}{\sqrt{2w_0}} \alpha_{12}B_{20}a^* \frac{e^{-i(w_{12}-w_0)t} - 1}{(w_{12} - w_0)}$$

Видно, что в эти выражения входит неизвестная величина – а (амплитуда поля или 0-го осциллятора). Что делать? Попробуем для начала перемножить эти величины.

$$C_1 C_1^* = |C_1|^2 \approx \frac{1}{2w_0} \alpha_{12}{}^2 B_{20}{}^2 aa^* \frac{\left|e^{i(w_{12}-w_0)t} - 1\right|^2}{(w_{12} - w_0)^2} =$$

$$= \frac{1}{2w_0} \alpha_{12}{}^2 B_{20}{}^2 aa^* 4 \frac{\sin^2 \frac{(w_{12} - w_0)t}{2}}{(w_{12} - w_0)^2}$$

Используем теперь соотношение для δ-функции

$$\delta(x)=\frac{2}{\pi}\lim_{t\to\infty}\frac{\sin^2 x\frac{t}{2}}{x^2 t}=\frac{4}{2\pi}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\frac{\sin^2 x\frac{t}{2}}{x^2}$$

Значит

$$C_1C_1^*=\frac{1}{2w_0}\alpha_{12}{}^2B_{20}{}^2aa^*4\frac{\sin^2\frac{(w_{12}-w_0)t}{2}}{(w_{12}-w_0)^2}=$$

$$=\frac{1}{2w_0}\alpha_{12}{}^2B_{20}{}^2aa^*2\pi t\frac{4}{2\pi}\frac{\sin^2\frac{(w_{12}-w_0)t}{2}}{t(w_{12}-w_0)^2}$$

и при t стремящемся к бесконечности:

$$C_1C_1^*=\frac{1}{2w_0}\alpha_{12}{}^2B_{20}{}^2aa^*2\pi t\delta(w_{12}-w_0)$$

А при t стремящемся к 0:

$$C_1C_1^*=\frac{1}{2w_0}\alpha_{12}{}^2B_{20}{}^2aa^*4\frac{(\frac{(w_{12}-w_0)t}{2})^2}{(w_{12}-w_0)^2}=$$

$$=\frac{1}{2w_0}\alpha_{12}{}^2B_{20}{}^2aa^*t^2$$

Теперь произведем те же самые процедуры для второго осциллятора:

$$C_2=\frac{1}{\sqrt{2w_0}}i\alpha_{21}B_{10}a^*\int e^{i(w_0-w_{12})t}dt+\frac{1}{\sqrt{2w_0}}i\alpha_{21}B_{10}a\int e^{i(w_{12}+w_0)t}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2w_0}}i\alpha_{21}B_{10}a^*\frac{e^{i(w_0-w_{12})\tau}}{i(w_0-w_{12})}\Bigg|_{t_0=0}^{t}+\frac{1}{\sqrt{2w_0}}i\alpha_{21}B_{10}a\frac{e^{i(w_{12}+w_0)\tau}}{i(w_{12}+w_0)}\Bigg|_{t_0=0}^{t}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2w_0}}i\alpha_{21}B_{10}a^*\frac{e^{i(w_0-w_{12})t}-1}{i(w_0-w_{12})}+\frac{1}{\sqrt{2w_0}}i\alpha_{21}B_{10}a\frac{e^{i(w_{12}+w_0)t}-1}{i(w_{12}+w_0)}$$

С учетом наших условий резонанса $w_{12}\approx w_0$ остается только 1-е слагаемое

$$C_2\approx\frac{1}{\sqrt{2w_0}}\alpha_{21}B_{10}a^*\frac{e^{i(w_0-w_{12})t}-1}{(w_0-w_{12})}$$

Комплексно сопряженная величина будет равна:

$$C_2^*\approx\frac{1}{\sqrt{2w_0}}\alpha_{21}B_{10}a\frac{e^{-i(w_0-w_{12})t}-1}{(w_0-w_{12})}$$

А их произведение:

$$C_2C_2^*\approx\frac{1}{2w_0}\alpha_{21}{}^2B_{10}{}^2a^*a\frac{\left|e^{i(w_0-w_{12})t}-1\right|^2}{(w_0-w_{12})^2}$$

При t стремящемся к нулю

$$C_2C_2^*\approx\frac{1}{2w_0}\alpha_{21}{}^2B_{10}{}^2(a^*a)t^2$$

Если амплитуда 0-го осциллятора (и сопряженная ей величина) представляют собой константы, то их можно смело менять местами.

Что делать с этими неизвестными величинами? Суть «фокуса» вторичного квантования в том, что комбинация этих величин, если считать их не числами, а операторами, может быть уже вполне определенной.

Приведем основные соотношения для операторов рождения (со звездочкой) и уничтожения, известные из квантовой теории:

$$a^* a = \hbar k$$

$$a a^* = \hbar(k+1)$$

k – это натуральное число (0, 1, 2 т.д.). Оно является числом квантов.

В нашем случае соответствующие амплитуды 0-го осциллятора нет оснований считать отнормированными для выполнения этих соотношений, поэтому предположим, что для них выполняются аналогичные соотношения, но не с постоянной Планка, а с некоторой константой Q.

$$a^* a = Qk$$

$$a a^* = Q(k+1)$$

Тогда выражения для квадрата модуля амплитуды 2-го осциллятора при t ст ремящемся к 0 (если сменить порядок произведения амплитуд 0-го осциллятора) будет таким:

$$C_2^* C_2 = \left|C_2\right|^2 \approx \frac{1}{2w_0}\alpha_{21}{}^2 B_{10}{}^2 Q(k+1)t^2$$

k – это число квантов 0-го осциллятора. Если k=0,то:

$$\left|C_2\right|^2 \approx \frac{1}{2w_0}\alpha_{21}{}^2 B_{10}{}^2 Q t^2$$

$$\left|C_2\right| \approx \frac{\alpha_{21} B_{10} Q t}{\sqrt{2w_0}}$$

$$\frac{d\left|C_2\right|}{dt} \approx \frac{\alpha_{21} B_{10} Q}{\sqrt{2w_0}}$$

В квантовой механике аналогичная величина (квадрат модуля амплитуды) интерпретируется как вероятность перехода из 1-го состояние во 2-е с испусканием одного кванта (уточним, что в начальном состоянии система находится на 1-м уровне, второй уровень пуст и квантов нет).

Сравним с формулами, полученными при решении задачи первым методом (см. выше):

$$S_2 \approx A\left(1 + \frac{\sqrt{\alpha_{21}\mu}}{\sqrt{2w_0}}\left|S_1\right| t\right) \qquad (t \to 0)$$

$$\frac{dS_2}{dt} \approx \frac{\sqrt{\alpha_{21}\mu}}{\sqrt{2w_0}}\left|S_1\right|$$

Видно, что формулы для производной модуля амплитуды 2-го осциллятора имеют схожую структуру. Если считать, что величина Q (наш аналог постоянной Планка) равняется

$$Q = \sqrt{\frac{\mu}{\alpha_{21}}},$$

то формулы совпадут.

Таки образом, наш аналог постоянной Планка является квадратным корнем из отношения малых параметров нулевого и второго осцилляторов (фактически малых параметров для уравнений поля и материи).

Отметим, что при втором методе рассмотрения задачи мы фактически избежали рассмотрения нелинейной добавки в уравнении для 0-го осциллятора. И соответствующий малый коэффициент оказался «встроен» в аналог постоянной Планка.

Все вышерассмотренное позволяет высказать следующее предположение: и электроны и электромагнитное поле адекватно описываются с помощью нелинейной системы дифференциальных уравнений с частными производными (в нашем упрощенном случае мы ограничились нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений). Вторичное квантование же является приближенным вычислительным приемом сведения нелинейной задачи к линейной для некоторых частных случаев.

Список литературы:

1) М.И.Рабинович, Д.И.Трубецков «Введение в теорию колебаний и волн» М. “Наука” 1984.
2) А.А.Соколов, Ю.М.Лоскутов, И.М.Тернов «Квантовая механика» М. “Просвещение” 1965.
3) Д.И.Блохинцев «Основы квантовой механики» М. “Наука” 1976.