Китаев А.Е.

Уравнение, описывающее и электронное, и фотонное поле, а также некоторые обобщения.

1. *Общее уравнение для электронно-позитронных и электромагнитных волн.*

В предыдущих работах я рассматривал некоторое обобщение волнового уравнения. Обобщение заключается в том, что к четырехмерному пространству-времени добавлена группа SO(3), параметризованная через углы Эйлера (или, другими словами, многообразие группы SO(3)), и волновое уравнение является уравнением в 7-мерном пространстве. Это уравнение есть фактически результат квантования свободного движения симметричного твердого тела (шарового волчка).

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+k_0{}^2 U-q\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}[\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2}-2\cos\theta\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2}]\}=0$$

Причем предполагается, что помимо обычных граничных условий в «угловом» пространстве

$U(\alpha)=U(\alpha+2\pi),\quad U(\beta)=U(\beta+2\pi)$

могут иметь место более общие условия:

$U(\alpha)U^*(\alpha)=U(\alpha+2\pi)U^*(\alpha+2\pi)$; $\quad U(\beta)U^*(\beta)=U(\beta+2\pi)U^*(\beta+2\pi)$

Или

$U^2(\alpha)=U^2(\alpha+2\pi)$; $\quad U^2(\beta)=U^2(\beta+2\pi)$

в случае действительной функции U.

Это позволяет уравнению иметь решения, пропорциональные следующим функциям (представленным в виде вектора-столбца):

$$\begin{pmatrix}E_1\\E_2\\E_3\\E_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\pi}e^{i\frac{(\alpha+\beta)}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\\ \frac{1}{2\pi}e^{-i\frac{(\alpha+\beta)}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\\ \frac{1}{2\pi}e^{i\frac{(\alpha-\beta)}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\\ \frac{1}{2\pi}e^{i\frac{(\beta-\alpha)}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

Уточню, что каждая из этих четырех функций является решением «угловой» части приведенного выше уравнения.

Такие функции-орты названы функциями половинного спина (обратим внимание на множитель ½ в показателях экспонент). Возможна и пропорциональность функциям единичного спина

$$\begin{pmatrix} W_{-1} \\ W_0 \\ W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4\pi} e^{-i\beta} \sin\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}\pi} \cos\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{4\pi} e^{i\beta} \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_{-1} \\ U_0 \\ U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4\pi} e^{-i\alpha} \sin\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}\pi} \cos\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{4\pi} e^{i\alpha} \sin\theta \end{pmatrix}$$

Помимо единичного и половинного спинов возможны и другие значения – 3/2, 2, а также 0, что соответствует отсутствию зависимости от углов (углов Эйлера). Но мы ограничились лишь рассмотрением случаев ½,1.

Заметим, что четырехмерное пространство-время и трехмерное искривленное пространство группы SO(3) нельзя считать полностью независимыми друг от друга. Повороту в обычном трехмерном пространстве будет соответствовать определенное преобразование координат в пространстве SO(3). Некоторым поворотам будет соответствовать просто «сдвиг» угловой координаты в SO(3):

$$\alpha' = \alpha + \alpha_0$$

Обратим внимание, что в вышеприведенном уравнении мы ввели дисперсионный (массовый) член, пропорциональный k_0^2. В работе «Некоторые выкладки, касающиеся лагранжиана для распределенных систем» мы писали соответствующее уравнение без этого члена, хотя и оговаривали возможность его появления.

Если рассматривать функции, зависящие от углов и входящие в записанные выше векторы-столбцы как орты, то можно «разложить» уравнение по этим ортам и получить систему таких уравнений для «координат» в пространстве этих функций-ортов, зависящих лишь от x,y,z и t:

$$\frac{1}{2\pi^2}\{\frac{1}{c^2} e_{1tt} - e_{1xx} - e_{1yy} - e_{1zz} + k_0{}^2 e_1 + \frac{3}{4} q e_1\} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi^2}\{\frac{1}{c^2} e_{4tt} - e_{4xx} - e_{4yy} - e_{4zz} + k_0{}^2 e_2 + \frac{3}{4} q e_4\} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi^2}\{\frac{1}{c^2} e_{3tt} - e_{3xx} - e_{3yy} - e_{3zz} + k_0{}^2 e_3 + \frac{3}{4} q e_3\} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi^2}\{\frac{1}{c^2} e_{2tt} - e_{2xx} - e_{2yy} - e_{2zz} + k_0{}^2 e_4 + \frac{3}{4} q e_2\} = 0$$

Это для функций половинного спина (то-есть для «координат» при разложении функции U по ортам половинного спина). Приведенные в этих выражениях общие множители появились при выводе уравнений с помощью функции Лагранжа (их, естественно, можно опустить). Для единичного же спина соответствующие уравнения:

$$\frac{3}{8\pi^2}\{\frac{1}{c^2}(u_{-1tt}-u_{-1xx}-u_{-1yy}-u_{-1zz}+k_0{}^2u_{-1}+2qu_{-1}\}=0$$
$$\frac{3}{8\pi^2}\{\frac{1}{c^2}(u_{1tt}-u_{1xx}-u_{1yy}-u_{1zz}+k_0{}^2u_1+2qu_1\}=0$$
$$\frac{3}{4\pi^2}\{\frac{1}{c^2}(u_{0tt}-u_{0xx}-u_{0yy}-u_{0zz}+k_0{}^2u_0+2qu_0\}=0$$

$$\frac{3}{8\pi^2}\{\frac{1}{c^2}(w_{-1tt}-w_{-1xx}-w_{-1yy}-w_{-1zz}+k_0{}^2w_{-1}+2qw_{-1}\}=0$$
$$\frac{3}{8\pi^2}\{\frac{1}{c^2}(w_{1tt}-w_{1xx}-w_{1yy}-w_{1zz}+k_0{}^2w_1+2qw_1\}=0$$
$$\frac{3}{4\pi^2}\{\frac{1}{c^2}(w_{0tt}-w_{0xx}-w_{0yy}-w_{0zz}+k_0{}^2w_0+2qw_0\}=0$$

Коэффициенты k_0^2 и q можно подобрать таким образом, чтобы волны с единичным спином распространялись без дисперсии (имели нулевую массу покоя), а волны с половинным спином имели дисперсию, соответствующую массе покоя электрона.

$$k_0{}^2+2q=0 \quad\Rightarrow\quad 2q=-k_0{}^2,\quad q=-\frac{k_0{}^2}{2}$$
$$k_0{}^2+\frac{3}{4}q=\frac{m_e{}^2c^2}{\hbar^2} \quad\Rightarrow\quad q=-\frac{4}{5}\frac{m_e{}^2c^2}{\hbar^2},\quad k_0{}^2=\frac{8}{5}\frac{m_e{}^2c^2}{\hbar^2}$$

Заметим, что 2=1(1+1), а ¾=1/2(1+1/2), то-есть это частные случаи формулы l(l+1). Здесь l – спин частицы. Формула для массы частицы с произвольным спином получается такой:

$$m^2=\frac{8}{5}m_e{}^2(1-\frac{l}{2}(l+1))$$

Заметим, что для спинов, больших единицы, масса получается комплексной. Это согласуется с тем фактом, что почти нет элементарных частиц со спином, большим единицы. Лептонов таких вообще нет. Гравитон со спином 2 на данный момент не обнаружен. Среди адронов есть случаи частиц со спином 3/2, но там, по-видимому, имеются дополнительные внутренние степени свободы, и ситуация сложнее.

Однако я отдаю себе отчет, что при введении в уравнение кубической нелинейности возникнет самовоздействие волн. Тогда существующие моды «общего» поля возможно будут лишь малыми возмущениями на фоне большого по амплитуде нелинейного решения. В этом случае дисперсионный член линеаризованного уравнения для этих возмущений будет зависеть (в общем случае) от амплитуды большого «фонового» решения.

С кубичной нелинейностью возможно связано слабое взаимодействие, ведь в нем принимают участие четыре (3+1) волны, например протон, позитрон, нейтрон и нейтрино. В рассмотрение кубичной нелинейности мы пока не вдавались, была затронута в предыдущих работах лишь квадратичная нелинейность. Из теории нелинейных колебаний и волн известно, что ей соответствует трехволновое взаимодействие. В нашем случае – это две волны половинного спина и одна – единичного. Естественно попытаться их интерпретировать как электронное, позитронное и фотонное поле.

Запишем исходное уравнение с нелинейной добавкой второго порядка (квадратичной):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+k_0{}^2U-$$

$$-q\{\frac{1}{\sin^2\theta}[\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2}-2\cos\theta\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2}]\}+3\mu U^2=0$$

Почему тройка? Это уравнение получено с использованием лагранжиана, куда U входит в третьей степени (и тройка появилась при дифференцировании).

Приведем теперь уравнения для его «проекций» на функции-орты половинного спина:

$$\frac{1}{2\pi^2}\{\frac{1}{c^2}e_{1tt}-e_{1xx}-e_{1yy}-e_{1zz}+Me_1\}+$$

$$+\mu\frac{8\pi^3}{\sqrt{3}}(e_4u_1+e_3w_{-1})+\mu\frac{4\sqrt{2}\pi^3}{\sqrt{3}}e_1w_0+\mu\frac{4\sqrt{2}\pi^3}{\sqrt{3}}e_1u_0=0$$

$$\frac{1}{2\pi^2}\{\frac{1}{c^2}e_{4tt}-e_{4xx}-e_{4yy}-e_{4zz}+Mke_4\}+$$

$$+\mu\frac{8\pi^3}{\sqrt{3}}(e_1u_1+e_2w_1)-\mu\frac{4\sqrt{2}\pi^3}{\sqrt{3}}e_4w_0-\mu\frac{4\sqrt{2}\pi^3}{\sqrt{3}}e_4u_0=0$$

$$\frac{1}{2\pi^2}\{\frac{1}{c^2}e_{3tt}-e_{3xx}-e_{3yy}-e_{3zz}+Me_3\}+$$

$$+\mu\frac{8\pi^3}{\sqrt{3}}(e_2u_{-1}+e_1w_{-1})-\mu\frac{4\sqrt{2}\pi^3}{\sqrt{3}}e_3w_0-\mu\frac{4\sqrt{2}\pi^3}{\sqrt{3}}e_3u_0=0$$

$$\frac{1}{2\pi^2}\{\frac{1}{c^2}e_{2tt}-e_{2xx}-e_{2yy}-e_{2zz}+Me_2\}+$$

$$+\mu\frac{8\pi^3}{\sqrt{3}}(e_3u_{-1}+e_4w_1)+\mu\frac{4\sqrt{2}\pi^3}{\sqrt{3}}e_2w_0+\mu\frac{4\sqrt{2}\pi^3}{\sqrt{3}}e_2u_0$$

Здесь для меньшей громоздкости обозначено

$$M=\frac{m_e{}^2c^2}{\hbar^2}$$

Аналогичные уравнения для полей единичного спина:

$$\frac{3}{8\pi^2}\{\frac{1}{c^2}u_{-1tt}-u_{-1xx}-u_{-1yy}-u_{-1zz}\}+\mu\frac{8\pi^3}{\sqrt{3}}e_2e_3=0$$

$$\frac{3}{8\pi^2}\{\frac{1}{c^2}u_{1tt}-u_{1xx}-u_{1yy}-u_{1zz}\}+\mu\frac{8\pi^3}{\sqrt{3}}e_1e_4=0$$

$$\frac{3}{4\pi^2}\{\frac{1}{c^2}u_{0tt}-u_{0xx}-u_{0yy}-u_{0zz}\}+\mu\frac{2\sqrt{2}\pi^3}{\sqrt{3}}\{(e_1{}^2+e_2{}^2)-(e_4{}^2+e_3{}^2)\}=0$$

$$\frac{3}{8\pi^2}\{\frac{1}{c^2}w_{-1tt}-w_{-1xx}-w_{-1yy}-w_{-1zz}\}+\mu\frac{8\pi^3}{\sqrt{3}}e_1e_3=0$$

$$\frac{3}{8\pi^2}\{\frac{1}{c^2}w_{1tt}-w_{1xx}-w_{1yy}-w_{1zz}\}+\mu\frac{8\pi^3}{\sqrt{3}}e_4e_2=0$$

$$\frac{3}{4\pi^2}\{\frac{1}{c^2}w_{0tt}-w_{0xx}-w_{0yy}-w_{0zz}\}+\mu\frac{2\sqrt{2}\pi^3}{\sqrt{3}}\{(e_1{}^2+e_2{}^2)-(e_4{}^2+e_3{}^2)\}=0$$

Эти уравнения можно рассматривать и как первичные, то-есть не получать их из уравнения для обобщенного поля U. Важно, насколько они соответствуют физической действительности. Правда, тогда «затуманивается» достаточно прозрачный смысл спина как квантового вращения.

Вместо введенных нами полей единичного спина u и w можно ввести четырехвектор A с помощью формул

$$u_1=u_{-1}=\frac{A_1}{\sqrt{2}},\quad A_1=\sqrt{2}u_1=\sqrt{2}u_{-1},$$

$$w_{-1}=-w_1=\frac{A_3}{\sqrt{2}},\quad A_3=\sqrt{2}w_{-1}=-\sqrt{2}w_1,$$

$$w_0+u_0=A_0,$$

$$A_2=0,$$

Уравнения для волн с половинным спином в пределе коротких волн и малости переменных коэффициентов (в качестве которых фигурируют поля единичного спина) удается свести к уравнению, близкому к уравнению Дирака:

$$[E(\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\omega}{2}\tau A_0)+\alpha_1(i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\omega}{2}\tau\alpha_0A_1)+$$

$$+\alpha_2(i\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\omega}{2}\tau\alpha_0A_2)+\alpha_3(i\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\omega}{2}\tau\alpha_0A_3)]\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}-\omega\alpha_0\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}=0$$

или (с применением операторного вида компонент поля)

$$[E(\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\omega}{2}\tau A^{op}{}_0)+\alpha_1(i\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\omega}{2}\tau A^{op}{}_1)+$$

$$+\alpha_2(i\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\omega}{2}\tau A^{op}{}_2)+\alpha_3(i\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\omega}{2}\tau A^{op}{}_3)]\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}-\omega\alpha_0\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}=0$$

где

$$\vec{A}^{op} = \begin{pmatrix} A_0 \\ -\alpha_0 A_1 \\ -\alpha_0 A_2 \\ -\alpha_0 A_3 \end{pmatrix},$$ E – единичная матрица 4 на 4,

$$\omega^2 = \frac{m_e{}^2 c^2}{\hbar^2}, \quad \tau = \mu \frac{8\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}\omega^2},$$ α_i- матрицы Дирака (i изменяется от 0 до 3).

Полному совпадению с уравнением Дирака мешает матрица α_0 , умноженная на пространственные компоненты четырехвектора A.

Домножим уравнение на $c\hbar$ (и уберем знак единичной матрицы E, пусть она будет обозначаться простой единицей):

$$[(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - c\hbar\frac{\omega}{2}\tau A^{op}{}_0) + \alpha_1(ic\hbar\frac{\partial}{\partial x} + c\hbar\frac{\omega}{2}\tau\alpha_0 A_1) +$$

$$+\alpha_2(ic\hbar\frac{\partial}{\partial y} + c\hbar\frac{\omega}{2}\tau\alpha_0 A_2) + \alpha_3(ic\hbar\frac{\partial}{\partial z} + c\hbar\frac{\omega}{2}\tau\alpha_0 A_3)]\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} - c^2 m_e \alpha_0 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0$$

Приравнивая коэффициенты так, чтобы это уравнение было по возможности более близким к уравнению Дирака, мы получим выражение для μ:

$$\mu = \frac{e m_e \sqrt{3}}{\hbar^2 4\pi\sqrt{2}}$$

Итак, наша гипотеза заключается в том, что взаимодействие фотонов и электронов (проявлением которого, в частности, являются излучение электромагнитных волн электронами и влияние электромагнитного поля на движение электронов) сводится к квадратичной нелинейности для «обобщенного» поля в некотором расширенном пространстве (обычное пространство-время плюс искривленное пространство группы SO(3), где в качестве координат выступают углы Эйлера). Электромагнитные волны (фотоны) и электроны (а также позитроны) являются различными модами этого обобщенного поля. Зависимость от углов Эйлера определяет их спин.

Принято считать, что представление электрона в виде вращающегося волчка лишено смысла. Спин – это момент, но без вращения. Для математической интерпретации этого образа привлекаются матрицы. Мы же считаем, что электрон все-таки вращается. Но вращение это не классическое, а квантовое (аналогично известной квантовой модели ротатора). И именно этому квантовому вращению отвечают угловые степени свободы группы SO(3).

2. *Влияние кубической нелинейности на частоту в простейшем случае обыкновенного дифференциального уравнения.*

Я уже высказал предположение, что введение кубичной нелинейности может повлиять на дисперсионный член, отвечающий за массу покоя. Здесь я проиллюстрирую этот эффект на простом примере уравнения Дуффинга. Более сложный случай уравнений с частными производными рассматриваться пока не будет. В принципе этот раздел можно пропустить, перейдя к следующему.

Итак, уравнение Дуффинга (с кубичной нелинейностью):

$$y'' + w_0{}^2 y = \nu y^3, \qquad \nu \text{ - малый параметр.}$$

Пусть известно его решение с достаточно большой амплитудой (обозначим его Y(t)). Получим уравнение для малой добавки к этому решению y_1.

$$y = Y + y_1$$

$$(Y + y_1)^3 \approx Y^3 + 3Y^2 y_1$$

Подставим все это в уравнение Дуффинга:

$$Y'' + y_1'' + w_0{}^2 (Y + y_1) = \nu(Y^3 + 3Y^2 y_1)$$

Так как Y есть решение исходного нелинейного уравнения, часть членов сократится.

$$y_1'' + w_0{}^2 y_1 = \nu 3Y^2 y_1$$

$$y_1'' + (w_0{}^2 - \nu 3Y^2) y_1 = 0$$

Фактически мы провели линеаризацию исходного нелинейного уравнения. Получилось линейное уравнение гармонического осциллятора со смещенной частотой. Причем смещение частоты зависит от амплитуды «основного» решения.

Постскриптум этого раздела: вообще говоря, просматривается некоторая аналогия между «фоновым» нелинейным решением большой амплитуды и «полным набором» заполненных электронных уровней Дирака.

3. *Переход к потенциалу. Понятие заряда.*

Запишем вновь уравнения для поля электронов (одно из четырех) и поля фотонов (одно из шести):

$$\frac{1}{2\pi^2}\{\frac{1}{c^2} e_{1tt} - e_{1xx} - e_{1yy} - e_{1zz} + Me_1\} +$$
$$+\mu\frac{8\pi^3}{\sqrt{3}}(e_4 u_1 + e_3 w_{-1}) + \mu\frac{4\sqrt{2}\pi^3}{\sqrt{3}} e_1 w_0 + \mu\frac{4\sqrt{2}\pi^3}{\sqrt{3}} e_1 u_0 = 0,$$

$$M = \frac{m_e{}^2 c^2}{\hbar^2},$$

$$\frac{3}{4\pi^2}\{\frac{1}{c^2} u_{0tt} - u_{0xx} - u_{0yy} - u_{0zz}\} + \mu\frac{2\sqrt{2}\pi^3}{\sqrt{3}}\{(e_1{}^2 + e_2{}^2) - (e_4{}^2 + e_3{}^2)\} = 0,$$

$$\mu = \frac{e m_e \sqrt{3}}{\hbar^2 4\pi\sqrt{2}}$$

Рассмотрим второе уравнение (для фотонов, то-есть поля единичного спина). Будем считать, что входящие в него поля e_i заданы (то-есть поля половинного спина играют роль источников для поля единичного спина).

Как известно, решением уравнения

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

является

$$\varphi = \int \frac{\rho(t', \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dx_0 dy_0 dz_0 ,$$

где $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}$

или

$$\varphi = \int \frac{\rho(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0$$

Применим к уравнению для u_0 последовательные преобразования, чтобы свести его к такому же виду:

$$\frac{1}{c^2} u_{0tt} - u_{0xx} - u_{0yy} - u_{0zz} = -\mu \frac{8\sqrt{2}\pi^5}{3\sqrt{3}} \{(e_1^{\ 2} + e_2^{\ 2}) - (e_4^{\ 2} + e_3^{\ 2})\}$$

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta) u_0 = -\frac{em_e}{\hbar^2}\frac{2\pi^4}{3}\{(e_1^{\ 2} + e_2^{\ 2}) - (e_4^{\ 2} + e_3^{\ 2})\}$$

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta) u_0 = 4\pi(-\frac{em_e}{\hbar^2}\frac{2\pi^4}{3}\frac{1}{4\pi})\{(e_1^{\ 2} + e_2^{\ 2}) - (e_4^{\ 2} + e_3^{\ 2})\}$$

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta) u_0 = 4\pi(-\frac{em_e}{\hbar^2}\frac{\pi^3}{6})\{(e_1^{\ 2} + e_2^{\ 2}) - (e_4^{\ 2} + e_3^{\ 2})\}$$

Значит «аналогом» величины ρ будет $\frac{em_e}{\hbar^2}\frac{\pi^3}{6}\{(e_1^{\ 2} + e_2^{\ 2}) - (e_4^{\ 2} + e_3^{\ 2})\}$

Решение будет таким:

$$u_0 = \frac{em_e}{\hbar^2}\frac{\pi^3}{6}\int \frac{\{e_1^{\ 2}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0) + e_2^{\ 2}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0) - e_3^{\ 2}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0) - e_4^{\ 2}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0)\}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0$$

Подставим теперь полученное выражение в самое первое уравнение этого раздела (для поля половинного спина), считая, что из полей с единичным спином лишь u_0 отлично от нуля:

$$\frac{1}{2\pi^2}\{\frac{1}{c^2} e_{1tt} - e_{1xx} - e_{1yy} - e_{1zz} + Me_1\} +$$

$$+\mu\frac{4\sqrt{2}\pi^3}{\sqrt{3}}[\frac{em_e}{\hbar^2}\frac{\pi^3}{6}\int \frac{\{e_1^{\ 2}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0) + e_2^{\ 2}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0) - e_3^{\ 2}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0) - e_4^{\ 2}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0)\}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0] e_1 = 0$$

$$\frac{1}{c^2} e_{1tt} - e_{1xx} - e_{1yy} - e_{1zz} + Me_1 +$$

$$+\frac{e^2 m_e^{\ 2}}{\hbar^4}\frac{\pi^7}{3}[\int \frac{\{e_1^{\ 2}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0) + e_2^{\ 2}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0) - e_3^{\ 2}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0) - e_4^{\ 2}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0)\}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0] e_1 = 0$$

Здесь e (без индекса) - это заряд электрона.

Если считать величину поля e_1 малой (чтоб пренебречь ее квадратом под знаком интеграла), а остальные e_i для i=2,3,4 наперед заданными, то для e_1 получается движение в заданном потенциале, формируемом полями e_i (i=2,3,4). Потенциал от точечного сосредоточения (места локализации) этих полей будет обратно пропорционален расстоянию от места их сосредоточения. Потенциал может быть и стационарным в случае независимых от времени полей e_i , i=2,3,4. Можно сказать, что понятием потенциала удобно пользоваться при взаимодействии полей половинного спина через продольное поле единичного спина. То-есть через продольные фотоны (именно так можно назвать поля u_0 и w_0).

Аналогичные выкладки можно провести и для e_2 , e_3, e_4 .

Итак, получается, что плотность заряда электронно-позитронного поля пропорциональна такому сочетанию амплитуд этого поля:

$$\rho \sim e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 - e_4^2$$

Заряд будет пропорционален интегралу от этих величин (по объему). В квантовомеханическом смысле такой интеграл есть среднее значение физической величины, в данном случае заряда. Я имею ввиду такую формулу для среднего значения некоторой величины f:

$\overline{f} = \int \psi^* \hat{f} \psi dq, \quad \hat{f} -$ это оператор некоторой физической величины (полукруглая шапочка означает знак оператора).

В нашем случае разумно считать, что оператор заряда пропорционален такой диагональной матрице (одной из матриц Дирака):

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Неплохо было бы найти дифференциальный вид этого оператора (в таком виде он действует не на амплитуды e_i , а на обобщенное поле U, зависящее не только от пространственно-временных, но и от угловых координат).

Отметим отличие полученного выражения для плотности заряда (точнее для величины, ей пропорциональной) от выражения, следующего из теории Дирака.

Сделаем небольшое отступление. Мы уже заметили, что амплитуды e_i входят в плотность заряда с разными знаками. Вспомним базисные функции-орты для этих амплитуд:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{(\alpha+\beta)}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \\ \frac{1}{2\pi} e^{-i\frac{(\alpha+\beta)}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \\ \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{(\alpha-\beta)}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \\ \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{(\beta-\alpha)}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Видно, что тем функциям, которые входят в плотность заряда с положительным знаком, соответствует одинаковое направление вращения и прецессии в функциях-ортах (то-есть α и β в показателе степени экспоненты имеют одинаковый знак). Отрицательному же значению заряда соответствует разное направление вращения и прецессии. Имеются ввиду не классические вращение и прецессия, а их квантованные аналоги, конечно.

Кстати, поля единичного спина, в показателях экспонент которых есть зависимость или от α, или от β (но не от обоих параметров вместе), не обладают таким свойством, как заряд. Скажем про базисные орты поля единичного спина так: они обладают либо вращением, либо прецессией (смотри начало этой работы). То-есть изменению α соответствует прецессия, а изменению β - вращение (напомню, что эти параметры есть углы Эйлера). Отметим также, что ввиду симметрии шарового волчка при изменении лишь одной из величин (α или β) это движение можно считать и вращением, и прецессией, разницы нет.

Делаем вывод – для того, чтобы был заряд, необходимо наличие сложного движения у соответствующего квантованного шарового волчка. Должны иметь место и прецессия, и вращение. Функции-орты должны зависеть от обоих углов Эйлера. Простое вращение не приводит к появлению заряда.

Если и вращение, и прецессия происходят в одном направлении, этому соответствует один знак заряда. Если же в разных направлениях – другой.

Таким образом, я полагаю, что спин и заряд связаны друг с другом. Некоторые виды вращательного движения (когда есть и вращение, и прецессия) приводят к появлению заряда.

Обычно говорится, что появление спина является следствием релятивизма (то-есть при переходе к релятивистскому уравнению Дирака попутно появляется и спин). В.А.Фок отмечает (книга «Начала квантовой механики»), что наряду со спином проявляется и вторая внутренняя степень свободы электрона. Далее процитирую Фока. «Эта вторая степень свободы имеет релятивистское происхождение. Физическое значение ее состоит, по-видимому, в том, что уравнение Дирака в известном смысле описывает не только электроны, но и позитроны – частицы с той же массой, как электроны, но с зарядом, равным по величине и противоположным по знаку заряду электрона.»

Можно было заподозрить, что появление наряду со спином и возможности существования разноименных зарядов указывает на некоторую взаимосвязь вращения и электрического заряда.

Вернемся к дифференциальному виду оператора заряда. По всей видимости он пропорционален смешанной производной

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}$$

Что будет в классическом пределе? Вспомним о существовании обобщенных импульсов у симметричного волчка (в нашем случае волчок будет даже не просто симметричным, а шаровым).

$$P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial\dot\alpha} = I(\dot\alpha + \dot\beta\cos\theta)$$

$$P_\beta = \frac{\partial L}{\partial\dot\beta} = I(\dot\beta + \dot\alpha\cos\theta)$$

Здесь I – диагональная компонента тензора инерции волчка (в случае шарового волчка все три диагональные компоненты одинаковы), L – лагранжиан волчка (формулу для него я здесь не привожу, ее можно посмотреть во многих книгах по классической механике, например Г.Голдстейн, «Классическая механика»).

Эти обобщенные импульсы являются интегралами движения. Именно их произведение $P_\alpha P_\beta$ лучше всего подходит на роль классического аналога заряда. При квантовании этого выражения происходит замена

$$P_\alpha \quad \to \quad -i\hbar\frac{\partial}{\partial\alpha},$$

$$P_\beta \quad \to \quad -i\hbar\frac{\partial}{\partial\beta},$$

$$P_\alpha P_\beta \quad \to \quad -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}$$

Делаем вывод, что заряд (собственное число оператора заряда) должен выражаться через собственное число вышеприведенного оператора. Точнее, быть пропорциональным ему.

$$e \sim \frac{\hbar^2}{4}$$

$$e = A\frac{\hbar^2}{4}, \quad A = \frac{4e}{\hbar^2}$$

$$Q = A(P_\alpha P_\beta) = \frac{4e}{\hbar^2}(P_\alpha P_\beta)$$

Было бы интересно проверить, изменяется ли движение классического волчка, если его зарядить, а также не появляется ли заряд при совмещении вращения и прецессии первоначально незаряженного волчка. То-есть произвести опыты, аналогичные в какой-то мере гиромагнитным опытам (эффекту Эйнштейна-де-Хааса и эффекту Барнетта).

4. *Другие степени свободы.*

Для того, чтобы описать протоны, нейтроны и другие тяжелые частицы, требуется какое-то обобщение уравнения, приведенного в начале данной работы. В каком направлении двигаться? Используем такое наводящее соображение: многие физики считают, что группой симметрии для тяжелых элементарных частиц является SU(3). В физико-математической литературе обычно приводятся матрицы генераторов этой группы (матрицы Гелл-Манна). Но никакой параметризации (аналогичной параметризации с помощью углов Эйлера для группы SO(3)) не рассматривается. Кроме того упоминается о связи группы SU(3) и «тройки» групп SU(2) (групп спинов). Но эта тройка параметризуется девятью параметрами, а в SU(3) их восемь. В связи с этим вспомним также, что группы SU(2) и SO(3) – это почти одно и тоже. Это все, повторю, наводящие соображения.

Приступим к делу. Рассмотрим три набора из углов Эйлера:

1) $\theta_1, \alpha_1, \beta_1,$

2) $\theta_2, \alpha_2, \beta_2,$

3) $\theta_3, \alpha_3, \beta_3$

Далее обобщим приведенное в начале статьи уравнение следующим образом. Будем считать, что к четырехмерному пространству-времени «присовокуплена» не одна группа SO(3), а три. Уравнение выглядит так:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k_0^2 U -$$

$$-q_1\{\frac{1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\sin\theta_1\frac{\partial U}{\partial\theta_1}) + \frac{1}{\sin^2\theta_1}[\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha_1^2} - 2\cos\theta_1\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha_1\partial\beta_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial\beta_1^2}]\} -$$

$$-q_2\{\frac{1}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}(\sin\theta_2\frac{\partial U}{\partial\theta_2}) + \frac{1}{\sin^2\theta_2}[\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha_2^2} - 2\cos\theta_2\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha_2\partial\beta_2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\beta_2^2}]\} -$$

$$-q_3\{\frac{1}{\sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}(\sin\theta_3\frac{\partial U}{\partial\theta_3}) + \frac{1}{\sin^2\theta_3}[\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha_3^2} - 2\cos\theta_3\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha_3\partial\beta_3} + \frac{\partial^2 U}{\partial\beta_3^2}]\} =$$

$$= 0$$

Квадратичный нелинейный член пока не вводим, хотя нелинейность, несомненно, должна быть. Суть гипотезы в том, что именно нелинейные добавки отвечают за взаимодействие и взаимопревращение частиц. Насчет коэффициентов q_i – более симметричным уравнение выглядит, если считать их одинаковыми, естественно. Но для общности на данном этапе будем считать их разными.

Предположим, что 2-й набор отвечает за уже рассмотренное нами в предыдущих разделах электромагнитное взаимодействие частиц с половинным и единичным спином (спином будем считать вращение в угловых координатах именно второго набора).

Введем такие столбцы решений этого уравнения (обратите внимание на наличие верхних и нижних индексов):

$$f^1 = \begin{pmatrix} f^1{}_1 \\ f^1{}_2 \\ f^1{}_3 \\ f^1{}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{(\alpha_1+\beta_1)}{2}} \cos\frac{\theta_1}{2} \\ \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{(\beta_1-\alpha_1)}{2}} \sin\frac{\theta_1}{2} \\ \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{(\alpha_1-\beta_1)}{2}} \sin\frac{\theta_1}{2} \\ \frac{1}{2\pi} e^{-i\frac{(\alpha_1+\beta_1)}{2}} \cos\frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix}$$

Верхний индекс – это номер набора переменных (углов Эйлера). Нижний – это номер самой функции в векторе-столбце.

Кстати, обратим внимание, что зависимость от углов немного не согласуется с той, что была в начале статьи (2-я и 4-я функции сменены местами).

Аналогично введем столбцы f^2 и f^3:

$$f^2 = \begin{pmatrix} f^2{}_1 \\ f^2{}_2 \\ f^2{}_3 \\ f^2{}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{(\alpha_2+\beta_2)}{2}} \cos\frac{\theta_2}{2} \\ \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{(\beta_2-\alpha_2)}{2}} \sin\frac{\theta_2}{2} \\ \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{(\alpha_2-\beta_2)}{2}} \sin\frac{\theta_2}{2} \\ \frac{1}{2\pi} e^{-i\frac{(\alpha_2+\beta_2)}{2}} \cos\frac{\theta_2}{2} \end{pmatrix}$$

$$f^3 = \begin{pmatrix} f^3{}_1 \\ f^3{}_2 \\ f^3{}_3 \\ f^3{}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{(\alpha_3+\beta_3)}{2}} \cos\frac{\theta_3}{2} \\ \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{(\beta_3-\alpha_3)}{2}} \sin\frac{\theta_3}{2} \\ \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{(\alpha_3-\beta_3)}{2}} \sin\frac{\theta_3}{2} \\ \frac{1}{2\pi} e^{-i\frac{(\alpha_3+\beta_3)}{2}} \cos\frac{\theta_3}{2} \end{pmatrix}$$

Всего параметров пока девять. Следующий этап наших действий: будем считать, что α_2 и α_3 – это один и тот же параметр (для определенности назовем его α_2). Таким образом, фактически мы будем рассматривать 8-мерную гиперповерхность девятимерного многообразия (аналогично одномерной прямой x=y для двумерной плоскости xOy). Параметров теперь становится восемь. Приведенная выше пара столбцов-решений приобретает такой вид (первый же столбец f^1 остается таким же):

$$f^2=\begin{pmatrix} f^2{}_1 \\ f^2{}_2 \\ f^2{}_3 \\ f^2{}_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}e^{i\frac{(\alpha_2+\beta_2)}{2}}\cos\frac{\theta_2}{2} \\ \frac{1}{2\pi}e^{i\frac{(\beta_2-\alpha_2)}{2}}\sin\frac{\theta_2}{2} \\ \frac{1}{2\pi}e^{i\frac{(\alpha_2-\beta_2)}{2}}\sin\frac{\theta_2}{2} \\ \frac{1}{2\pi}e^{-i\frac{(\alpha_2+\beta_2)}{2}}\cos\frac{\theta_2}{2} \end{pmatrix}$$

$$f^3=\begin{pmatrix} f^3{}_1 \\ f^3{}_2 \\ f^3{}_3 \\ f^3{}_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}e^{i\frac{(\alpha_2+\beta_3)}{2}}\cos\frac{\theta_3}{2} \\ \frac{1}{2\pi}e^{i\frac{(\beta_3-\alpha_2)}{2}}\sin\frac{\theta_3}{2} \\ \frac{1}{2\pi}e^{i\frac{(\alpha_2-\beta_3)}{2}}\sin\frac{\theta_3}{2} \\ \frac{1}{2\pi}e^{-i\frac{(\alpha_2+\beta_3)}{2}}\cos\frac{\theta_3}{2} \end{pmatrix}$$

Обратим внимание, что в третьем столбце задействован угол α_2 (напомню, что α_2 и α_3 – это теперь одно и тоже).

Нормировочные множители перед этими функциями я сохранил те же, что были в случае лишь одной группы SO(3). Это сделано просто по аналогии, в дальнейшем этот вопрос потребует уточнения.

Далее рассмотрим такие произведения функций $f^i{}_j$, также являющиеся решениями уравнения:

$$\varphi_1 = f^1{}_1 f^2{}_1$$

$$\varphi_1 = f^1{}_2 f^3{}_1$$

$$\varphi_1 = f^3{}_2 f^2{}_2$$

Напомню, что верхний индекс – это номер набора углов Эйлера. Итак, в первой функции φ мы имеем зависимость от 1-го и 2-го наборов углов в качестве переменных. Во второй – от 1-го и 3-го. И в третьей – от 2-го т 3-го.

Далее рассмотрим следующие операторы:

$$\hat{L}_1 = i\hbar(\sin\alpha_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} + ctg\,\theta_1 \cos\alpha_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\cos\alpha_1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\beta_1})$$

$$\hat{L}_2 = -i\hbar(\cos\alpha_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} + ctg\,\theta_1 \sin\alpha_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\sin\alpha_1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\beta_1})$$

$$\hat{L}_3 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\alpha_1}$$

$$\hat{L}_4 = i\hbar(\sin\alpha_2 \frac{\partial}{\partial\theta_2} + ctg\,\theta_2 \cos\alpha_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + \frac{\cos\alpha_2}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\beta_2})$$

$$\hat{L}_5 = -i\hbar(\cos\alpha_2 \frac{\partial}{\partial\theta_2} + ctg\,\theta_2 \sin\alpha_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + \frac{\sin\alpha_2}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\beta_2})$$

$$\hat{L}_6 = i\hbar(\sin\alpha_2 \frac{\partial}{\partial\theta_3} + ctg\,\theta_3 \cos\alpha_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + \frac{\cos\alpha_2}{\sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\beta_3})$$

$$\hat{L}_7 = -i\hbar(\cos\alpha_2 \frac{\partial}{\partial\theta_3} + ctg\,\theta_3 \sin\alpha_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + \frac{\sin\alpha_2}{\sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\beta_3})$$

$$\hat{L}_8 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\alpha_2}$$

Это аналоги операторов полного момента L_x,L_y и L_z в квантовой теории твердого тела. Можно было ввести сперва девять таких операторов, считая, что α_2 и α_3 – это разные параметры, и лишь потом перейти к восьми операторам, приравняв α_2 и α_3 .

Посмотрим, как действуют эти операторы на введенные нами функции φ, которые мы расположим в виде вектора-столбца из трех компонент.

$$\hat{L}_1\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \varphi_1\\ 0\end{pmatrix},\quad \hat{L}_2\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix} = i\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\varphi_2\\ -\varphi_1\\ 0\end{pmatrix},\quad \hat{L}_3\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ -\varphi_2\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\hat{L}_4\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\varphi_3\\ 0\\ \varphi_1\end{pmatrix},\quad \hat{L}_5\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix} = i\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\varphi_3\\ 0\\ -\varphi_1\end{pmatrix},$$

$$\hat{L}_6\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\ \varphi_3\\ \varphi_2\end{pmatrix},\quad \hat{L}_7\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix} = i\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\ \varphi_3\\ -\varphi_2\end{pmatrix},\quad \hat{L}_8\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ -2\varphi_3\end{pmatrix}$$

Запишем все это в матричном виде:

$$\hat{L}_1\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix},\quad \hat{L}_2\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&i&0\\-i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix},\quad \hat{L}_3\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix},$$

$$\hat{L}_4\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix},\quad \hat{L}_5\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix},$$

$$\hat{L}_6\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix},\quad \hat{L}_7\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&i\\0&-i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix},\quad \hat{L}_8\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix}$$

Полученные таким образом матрицы 3 на 3 почти совпадают с матрицами Гелл-Манна (приведу их для справки).

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad \lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\quad \lambda_8=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

Будем развивать нашу гипотезу дальше. По-видимому, сильное взаимодействие связано с зависимостью волновой функции U от первого набора углов. Причем, скорее всего, это зависимость такова, что и протон, и нейтрон соответствуют половинному «спину из первого набора». Само взаимодействие происходит за счет квадратичной нелинейности в уравнении (так же как и электромагнитное).

Почему нейтрон не имеет электрического заряда? Попробуем интерпретировать этот факт в рамках данной теории. Если допустить, что зависимость протонного поля (вернее одной их его мод) от параметров второго и третьего наборов углов такова:

$$P \sim e^{i\frac{(\alpha_2+\beta_2)}{2}}\cos\frac{\theta_2}{2},$$

то-есть фактически зависимости от третьего набора углов нет (как мы предполагаем), то для нейтронного поля добавим зависимость от третьего набора:

$$N \sim e^{i\frac{(\alpha_2+\beta_2)}{2}}\cos\frac{\theta_2}{2}e^{i\frac{(-\alpha_2-\beta_3)}{2}}\cos\frac{\theta_3}{2}=e^{i\frac{\beta_2}{2}}\cos\frac{\theta_2}{2}e^{-i\frac{\beta_3}{2}}\cos\frac{\theta_3}{2},$$

Видно, что зависимость от α_2 исчезает. Таким образом, из пары вращение плюс прецессия исчезает один компонент, и вращательное движение становится простым. Это, как мы выяснили в предыдущем разделе статьи, соответствует исчезновению электрического заряда.

Итак, тот факт, что второй и третий набор имеют одну общую координату, позволяет сокращать зависимость от этой координаты. При этом пропадает и электрический заряд.

Такой же зависимостью от углов второго и третьего наборов, по-видимому, обладает и нейтринное поле. Разница нейтрона и нейтрино в том, что волновая функция нейтронного поля зависит и от углов первого набора (как и протонное поле).

Список литературы:

1) А. С. Давыдов «Квантовая механика» М. “Наука” 1973.
2) Г. Голдстейн «Классическая механика» М. “Наука” 1975.
3) П. А. М. Дирак «К созданию квантовой теории поля» М. “Наука” 1990.
4) В. А. Фок «Начала квантовой механики» М. “Наука” 1976.
5) Д. К. Фаддеев «Лекции по алгебре» М. “Наука” 1984.
6) Ю.В. Новожилов «Введение в теорию элементарных частиц» М. “Наука” 1972.
7) В. С. Замиралов «Основные понятия теории групп и их представлений и некоторые приложения к физике частиц» (Интернет, http://nuclphys.npi.msu.su/thgr/index.html#c)
8) Л. Райдер «Элементарные частицы и симметрии» М. “Наука” 1983.