Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Новая постановка вариационной задачи.

Вспомним обычную формулировку задачи в вариационном исчислении – требуется найти функцию x(t), дающую экстремум функционалу

$$S_0 = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x}) dt$$

Или, в случае 3-мерного пространства (функцию x заменяем на радиус-вектор):

$$S_0 = \int_{t_1}^{t_2} F(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) dt$$

Изменим постановку задачи. Радиус-вектор, входящий в функционал под знаком «точки», оставим неизменным. В остальных местах заменим его (то-есть радиус-вектор) на некоторый вектор-параметр **g**. Будем считать **g** множеством всех векторов, направленных из начала координат во все возможные точки пространства. Ни об какой зависимости параметра **g** от времени речи не идет. А радиус-вектор движущейся точечной частицы **r,** зависящий от времени (тут мы уже перешли на «язык» механики), представляет из себя подмножество этого множества **g** (ведь не факт, что движущаяся частица пройдет через все точки пространства, хотя в принципе такое возможно). Таким образом, интеграл приобретает такой вид:

$$S(\vec{r}, \vec{g}) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, \vec{g}, \dot{\vec{r}}) dt$$

Требуется найти подмножество множества **g** (возможно параметризованное с помощью t), дающее экстремум для S. Или хотя бы стационарное подмножество множества **g** (аналог стационарной точки функции нескольких переменных, которая, как мы знаем, вовсе не обязательно будет точкой экстремума).

Мы будем варьировать обычным образом радиус-вектор, зависящий от времени [1]. Это действие сведется к замене радиус вектора на следующую векторную функцию, зависящую от параметра α:

$$\vec{r}(t, \alpha) = \vec{r} + \alpha \vec{\eta}$$

$$\vec{\eta}(t_1) = 0, \quad \vec{\eta}(t_2) = 0$$

$$\dot{\vec{r}}(t, \alpha) = \dot{\vec{r}} + \alpha \frac{d}{dt}(\vec{\eta})$$

Функционал при таком подходе превращается в функцию от α.

$$S(\alpha, \vec{g}) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, \vec{g}, \dot{\vec{r}}(t, \alpha)) dt$$

Найдем дифференциал S (изменяя не только α, но и **g**).

$$dS = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial}{\partial \vec{g}}(F) d\vec{g} + \frac{\partial}{\partial \alpha}(F) d\alpha \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \vec{g}} d\vec{g} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\vec{r}}(t, \alpha)} \frac{\partial \dot{\vec{r}}(t, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha \right] dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \vec{g}} d\vec{g} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\vec{r}}(t, \alpha)} \dot{\vec{\eta}} d\alpha \right] dt$$

Применяя стандартный прием интегрирования по частям и учитывая зануление добавки к радиус-вектору на границах временного интервала, мы получим

$$dS = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial}{\partial \vec{g}}(F) d\vec{g} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\vec{r}}(t,\alpha)}\right) \vec{\eta}\, d\alpha \right] dt,$$

$$F = F(t, \vec{g}, \dot{\vec{r}}(t,\alpha))$$

Важное уточнение – полная производная от F не действует на параметр **g** – ведь он не зависит от t (в отличие от радиус-вектора).

Подбирая вид добавки и значение dα, мы можем добиться, чтобы внутри временного интервала интегрирования выполнилось равенство

$$d\vec{g} = \vec{\eta}\, d\alpha$$

Тогда условием равенства нулю дифференциала от S будет выполнение следующего соотношения

$$\frac{\partial F(t, \vec{g}, \dot{\vec{r}}(t,\alpha))}{\partial \vec{g}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t, \vec{g}, \dot{\vec{r}}(t,\alpha))}{\partial \dot{\vec{r}}(t,\alpha)}\right) = 0$$

Так как **r** есть подмножество **g**, после выполнения всех дифференцирований их можно обозначить одним значком, например **r**. Можно и с самого начала обозначить их значком **r**, но тогда нужно помнить о том, что производная по времени (теперь уже не совсем «полная») действует на время и на скорость, но не действует на радиус-вектор **r**.

$$\frac{\partial F(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})}{\partial \vec{r}} - \frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{\partial F(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) = 0$$

(обозначим эту особенность производной знаком «тильда» над d).

Таким образом, уравнения, соответствующие такой задаче, будут отличаться от уравнений Эйлера или Лагранжа только наличием «не совсем полной» производной по времени (которая не действует на **r**).

Приведем пример применения полученных соотношений. Пусть (в одномерном случае)

$$F = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{kg^2}{2} - \gamma g \dot{r}$$

Или, заменяя g на r,

$$F = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{kr^2}{2} - \gamma r \dot{r} \qquad (1)$$

Найдем производную F по скорости (фактически это есть обобщенный импульс, обозначим его R)

$$R = m\dot{r} - \gamma r$$

И составим уравнение движения, помня, что производная по времени от обобщенного импульса не действует на r:

$$m\ddot{r} + kr + \gamma \dot{r} = 0$$

Это есть уравнение осциллятора при наличии трения.

ДОПОЛНЕНИЕ.

Введенная нами функция F (1) – это фактически лагранжиан L для диссипативного случая. Попробуем испытать гамильтонов подход для этой задачи. Выразив скорость через обобщенный импульс R, можно получить такой гамильтониан:

$$H = \frac{(R + \gamma r)^2}{2m} + \frac{kr^2}{2}$$

Далее можно получить аналог уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial R} \\ \dfrac{\tilde{d}}{dt} R = -\dfrac{\partial H}{\partial r} \end{cases}$$

Во втором уравнении мы имеем введенную нами выше «не совсем полную» производную, не действующую на r (и помеченную значком «тильда»). Можно записать второе уравнение так:

$$\dot{R} - \frac{\partial R}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}$$

Подставим наш гамильтониан в правые части уравнений:

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{R}{m} + \dfrac{\gamma r}{m} \\ \dot{R} - (-\gamma V) = -\dfrac{(R + \gamma r)\gamma}{m} - kr \end{cases}$$

Далее нужно взять полную производную по времени от первого уравнения. Потом вместо полной производной от обобщенного импульса подставить ее выражение из второго уравнения. Если бы в левой его части была только полная производная по времени, все члены, отвечающие за диссипацию, сократились бы. Но с учетом нашего нового выражения «не совсем полной» производной мы получим дифференциальное уравнение для осциллятора с затуханием.

Список литературы:

1) Голдстейн Г. «Классическая механика», М. «Наука» 1975
2) А.Д.Мышкис «Лекции по высй математике», М. «Наука» 1969
3) Ландау, Лифшиц «Механика», М. «Наука» 1988
4) Смирнов «Курс высшей математики» Т.4 Ч.1, М. «Наука» 1974