Китаев А.Е.

Применение метода вторичного квантования к обыкновенным дифференциальным уравнениям (нелинейным)

Мы уже рассматривали вопрос о применении подхода, похожего на вторичное квантование, к обыкновенным дифференциальным уравнениям в работе «О взаимосвязи вторичного квантования и нелинейности» (сайт science-nighny.narod.ru). Там обыкновенному дифференциальному уравнению (нелинейному – для осциллятора с квадратичной или кубичной нелинейностью) сопоставлялось **линейное** уравнение с частными производными. Фактически вместо одного нелинейного осциллятора мы имели несколько линейных, причем каждый «имел» свое собственное время. Нелинейная добавка при этом заменялась специфическим интегральным членом, описывающим взаимодействие осцилляторов. Были получены амплитуды гармоник и сдвиг частоты (для случая кубичной нелинейности). Переход к представлению чисел заполнения в этой работе не производился.

Встает вопрос – нельзя ли действовать, исходя прямо из вида гамильтониана для нелинейного уравнения? Попробуем это сделать.

Будем исходить из гамильтониана для осциллятора с нелинейной добавкой. Если добавка квадратичная, он имеет такой вид

$$H = \frac{p^2}{2} + w_0^2 \frac{x^2}{2} + \mu \frac{x^3}{3}$$

Если кубичная – такой

$$H = \frac{p^2}{2} + w_0^2 \frac{x^2}{2} + \mu \frac{x^4}{4}$$

Возьмем часть гамильтониана, зависящую только от координаты

$$H' = w_0^2 \frac{x^2}{2} + \mu \frac{x^3}{3}$$

Запишем такое уравнение (это, как вы понимаете, некий отдаленный аналог уравнения Шредингера):

$$\ddot{S} + H'S = 0$$

или

$$\ddot{S} + w_0^2 \frac{x^2}{2} S + \mu \frac{x^3}{3} S = 0$$

Чем является величина S? Будем считать ее функцией некоторого сложного труднопредставляемого набора переменных. Пусть имеется счетное множество состояний. Оно пронумеровано. И каждому состоянию соответствует еще натуральный ряд аргументов: 0,1,2,3 и так далее. Кроме того, имеется еще один действительный аргумент – время.

Если бы состояние было одно, мы назвали бы такую функцию функцией одного натурального аргумента. Но в нашем случае мы имеем бесконечное число натуральных аргументов. То-есть наша функция – это функция бесконечного числа натуральных переменных.

Легче представить такую функцию, если она имеет специфический вид: отлична от нуля при каком-то одном натуральном значении (равном N), соответствующем только одному состоянию. Для всех других значений переменных она равна нулю. Такую функцию можно назвать «ортоподобной». В квантовой механике такая функция (если квадрат модуля значения этой функции равен единице)соответствует ситуации, когда в каком-то одном состоянии собрались N частиц .

Состояния пронумеруем индексом m. Натуральный аргумент обозначим N_m. Будем считать, что для N=1 значения «ортоподобных» функций пропорциональны

$$e^{imwt}$$

где w – неизвестная на этом этапе величина.

Вторая производная по времени в этом случае вычисляется так:

$$\ddot{S} = -m^2 w^2 S$$

Кроме того введем такой «постулат», применимый для «ортоподобных» функций:

$$S(N) = (S(1))^N$$

Здесь N – это натуральный аргумент для некоторого состояния.

Далее – предположим, что

$$x = U + U^*$$

Вспоминая подход вторичного квантования, величины U и U^* можно назвать «операторами». В чем заключается их «операторность»? Пользуясь аналогией с квантовомеханическими операторами рождения-уничтожения, определим их действие на S следующими правилами. Первое правило: для каждого состояния оператор свой, то-есть операторы нумеруются индексом m. Правило номер два мы сформулируем для ортоподобных функций. Пусть для состояния m она равна F при натуральном аргументе, равном N. Если мы теперь подействуем оператором U_m, то она будет равняться F не для N, а для (N-1). Если же подействуем U^*_m, то она будет равняться F для (N+1) .

Обобщением этой ситуации на случай неортоподобных функций будут, похоже, сдвиги «размазанных» функций вдоль m-й натуральной оси на единицу.

Как мы видим, аналогия с квантовой механикой неполная – отсутствуют множители, пропорциональные квадратному корню из N и (N+1). Операторы перестановочны (в отличие от квантовомеханических аналогов).

Возникает соблазн записать результат подстановки «операторов» таким образом:

$$\ddot{S}+\frac{w_0^2}{2}(U^2+2UU^*+U^{*2})S+\frac{\mu}{3}(U^3+3U^2U^*+3UU^{*2}+U^{*3})S=0$$

Но мы вынуждены прибегнуть к несколько более сложной конструкции, чтоб учесть наличие индексов у операторов. Вместо U в гамильтониан подставляется бесконечная сумма по состояниям:

$$\sum_m U_m$$

Аналогично – для U^*. И уравнение приобретает такой вид:

$$\ddot{S}+\frac{w_0^2}{2}(\sum_{i,j}U_iU_j+\sum_{i,j}2U_iU_j^{\ *}+\sum_{i,j}U^*{}_iU^*{}_k)S+$$
$$+\frac{\mu}{3}(\sum_{i,j,k}U_iU_jU_k+3\sum_{i,j,k}U_iU_jU^*{}_k+3\sum_{i,j,k}U_iU^*{}_jU^*{}_k+\sum_{i,j,k}U^*{}_iU^*{}_jU^*{}_k)S=0$$

Часть членов будет в дальнейшем откинута, так как они не приводят к резонансу. Вообще похоже, что используемая нами математическая конструкция - это что-то вроде «сети» для отлова резонансных эффектов.

Рассмотрим 0-е приближение (когда параметр μ равен нулю). Квадраты величин U и U^* отбросим, ведь только произведение U и U^* возвратит строку S к исходному состоянию (эти операторы нейтрализуют друг друга). Уравнение получается таким (если считать S ортоподобной величиной, пропорциональной e^{inwt}) :

$$-n^2w^2S+\frac{w_0^2}{2}2U_nU_n^{\ *}S=0$$
$$-n^2w^2S+w_0^2S=0$$

Решением этого уравнения является такая величина:

$$n=1$$
$$S=Ae^{iwt}$$
$$w=w_0$$

где A – произвольная величина.

Фактически таким образом мы получили основное колебание осциллятора. A – его амплитуда.

Перейдем к 1-му приближению. Запишем его, предположив, что решение также ортоподобно (как и для нулевого приближения). И что номер состояния для этого решения равен 2, а натуральный аргумент равен 1.

$$-4w^2S^{(1)}+w_0^2S^{(1)}+\frac{\mu}{3}3\sum_{i,j,k}U_iU_jU^*{}_kS^{(0)}=0$$

Или

$$S^{(1)}(4w^2 - w_0^2) = \mu \sum_{i,j,k} U_i U_j U^*{}_k S^{(0)}$$

Здесь часть слагаемых уже отброшена (более того, и из оставшейся суммы мы в дальнейшем оставим только одно слагаемое). Сейчас мы поймем почему. Чтоб получить S для первого приближения , оператор U^*, поднимающий систему из «вакуума» (то-есть из единицы - экспоненты с нулевым показателем), должен быть один. Значит два других сомножителя должны быть без звездочки. Они опускают систему. Мы хотим, чтоб они опускали систему из состояния, которое нами уже найдено в качестве нулевого приближения. Итак, приходим к выводу, что k=2, а i = j = 1.

Но пара таких операторов не может опустить в вакуум систему с натуральным аргументом 1, которое было нами найдено (для нулевого приближения). Только систему с натуральным аргументом, равным 2. Как быть? Используем наш постулат, приведенный выше. Чтоб выразить амплитуду ортоподобной функции с аргументом 2 как квадрат ортоподобной функции с аргументом 1.

Насчет частоты: имеет смысл считать, что $w=w_0$. В итоге получаем

$$S^{(1)} = \frac{\mu A^2}{3w_0},$$

Где A – это амплитуда нулевого приближения (то-есть основной гармоники). Таким образом мы нашли амплитуду второй гармоники.

Перейдем теперь к случаю нелинейности третьего порядка. Аналог уравнения Шредингера будет таким:

$$\ddot{S} + w_0^2 \frac{x^2}{2} S + \mu \frac{x^4}{4} S = 0$$

Точно так же, как и для случая квадратичной нелинейности, вместо U в гамильтониан подставляется бесконечная сумма по состояниям:

$$\sum_m U_m$$

И аналогично – для U^*.

Нулевое приближение рассматривается точно так же, как и в предыдущем случае. Для первого же приближения запишем, также предположив, что решение ортоподобно, но номер состояния для этого решения равен 3 (натуральный же аргумент равен 1):

$$-9w^2 S^{(1)} + w_0^2 S^{(1)} + \frac{\mu}{4} 4 \sum_{i,j,k,l} U_i U_j U^*{}_k U_l S^{(0)} = 0$$

Или

$$S^{(1)}(9w^2 - w_0^2) = \mu \sum_{i,j,k,l} U_i U_j U_l U^*{}_k S^{(0)}$$

Здесь тоже часть слагаемых уже отброшена. Чтоб получить S для первого приближения , оператор U^*, поднимающий систему из единичного вакуумного состояния , тоже должен быть один. Значит три других сомножителя (ведь всего сомножителей четыре) должны быть без звездочки. Они опускают систему. Мы хотим, чтоб они опускали систему из состояния 1 (которое нами уже найдено в качестве нулевого приближения). Итак, приходим к выводу, что k=3, а

i = j =l= 1.

Но тройка таких операторов не может опустить в вакуум систему с натуральным аргументом 1, которое было нами найдено для нулевого приближения. Только систему с натуральным аргументом, равным 3. Также используем введенный ранее постулат, чтоб выразить амплитуду ортоподобной функции с аргументом 3 как куб ортоподобной функции с аргументом 1.

В итоге получаем

$$S^{(1)} = \frac{\mu A^3}{8w_0},$$

Где A – это амплитуда нулевого приближения (то-есть основной гармоники). Это есть третья гармоника.

Но в случае осциллятора с нелинейностью третьего порядка имеет место нелинейный сдвиг частоты, зависящий от амплитуды. Попробуем получить его. Для этого предположим, что номер состояния для первого приближения равен 1 (а не 3). Натуральный аргумент равен 1, как и ранее.

Какие оставить операторы в произведении, отвечающем за нелинейность (имеется ввиду произведение четырех сомножителей)? Оператор U^*, как и раньше, должен быть один. Но тройка операторов U должна иметь другие индексы. Например i=j=1 и l=(-1). Это уже, заметим, не ортоподобное состояние. Индексы двух состояний симметричны относительно нуля. Имеет смысл считать, что «веса» этих состояний комплексно сопряжены. Введем обобщение нашего постулата (введенного, как вы помните, для ортоподобных функций).

$$S\begin{pmatrix} N & M \\ -k & k \end{pmatrix} = S^*\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}^N S\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}^M$$

Здесь внизу – индекс состояния, а наверху – натуральный аргумент.

Важный момент – нужно учесть, что не один, а три слагаемых приводят к такому же результату (минус единице может равняться не только l, но и i,и j).

i	***j***	***l***
1	1	-1
1	-1	1
-1	1	1

Поэтому добавляется множитель 3. Получим таким образом

$$S^{(1)}(w^2 - w_0^2) = 3\mu(S^{(0)})^*(S^{(0)})^2 = 3\mu\left|S^{(0)}\right|^2 S^{(0)}$$

Далее учтем, что и первое приближение для S, и нулевое имеет смысл считать одной и той же функцией. Ведь частота их одинакова! Верхние индексы (1) и (0) убираем. Функция S – одна и та же. Таким образом

$$Sw^2 = Sw_0^2 + 3\mu\left|S\right|^2 S = (w_0^2 + 3\mu\left|S\right|^2)S$$

Отсюда получается нелинейный сдвиг частоты.

$$w^2 = w_0^2 + 3\mu\left|S\right|^2 = w_0^2(1 + \frac{3\mu\left|S\right|^2}{w_0^2})$$

Или

$$w \approx w_0 + \frac{3\mu\left|S\right|^2}{2w_0^2}$$

На этом основную часть статьи можно считать законченной. В заключение – несколько замечаний. Какой физический смысл имеют введенные нами понятия?

Смысл состояния с индексом m ясен – это гармоника с частотой mw. Но не очень понятен смысл натурального аргумента, соответствующего этой гармонике (выше обозначенного нами как N). В квантовой механике его аналог является числом частиц в некотором состоянии. Но что понимать под этим в случае обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего классический осциллятор?

Если N=1, то мы имеем обычную ситуацию – колебание некоторой гармоники (с амплитудой A_0). Но если в некоторую формулу входит A_0^2, то мы можем сказать, что это есть ситуация, когда в одном состоянии находятся 2 осциллятора (или 2 «виртуальных» осциллятора, если угодно). То-есть произошло как бы раздвоение осциллятора. По-видимому, другого смысла во введении подобной многочастичности нет. Итак, если в дифференциальное уравнение входит функция y^2 (в качестве нелинейной добавки), то мы как бы константируем «раздвоение» системы, действующей «дважды» в один и тот же момент времени.

Какой вывод можно сделать из всего этого рассмотрения? Вывод видится в формулировке предположения, касающегося корпускулярно-волнового дуализма электронов, фотонов и других элементарных частиц (полей). По-видимому, эти объекты (частицы-поля) имеют все-таки волновую природу, а квантование (вторичное) – это лишь математический прием для описания полей, нелинейно связанных друг с другом. Корпускулярными же свойствами обладают лишь локализованные в пространстве и времени сгущения полей.

Список литературы:

1) Д.И.Блохинцев «Основы квантовой механики» М. “Наука” 1976.

2) Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц «Механика» М. «Наука» 1988.

3) Л.В.Тарасов «Введение в квантовую оптику» М. Издательство ЛКИ 2007.