Китаев А.Е.
(kitaev_a_e@mail.ru)

Взаимодействие пространственного заряда с электромагнитным потенциалом (резонанс на нулевой частоте).

Хочу обратить ваше внимание, уважаемый читатель, на интересный факт, следующий из соединения давно известных и проверенных на практике уравнений в одну систему. Возьмем пару уравнений, одно из которых известно уже более восьмидесяти лет (нерелятивистское уравнение Шредингера), другое – еще с 19 века (волновое уравнение для скалярного потенциала электромагнитного поля).

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi-V\psi=0$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi-\Delta\varphi=4\pi\rho$$

Теперь учтем, как выражается через волновую функцию плотность заряда и как потенциальная энергия V зависит от потенциала электромагнитного поля

$$V=e\varphi$$

$$\rho=e\psi\psi^*$$

С учетом этого

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi=e\varphi\psi \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi-\Delta\varphi=4\pi e\psi\psi^* \end{cases}$$

Здесь самое место уточнить, что фактически, выражая заряд через волновую функцию таким образом и считая, что этот заряд действует на саму волновую функцию, мы используем не вероятностную трактовку квантовой механики, а скорее электродинамическую интерпретацию Шредингера [1]. Обратим внимание, что получившаяся система уравнений является нелинейной.

Теперь предположим, что в достаточно большом объеме пространства каким-либо образом создана нескомпенсированная пространственная плотность заряда. Идеализируя ситуацию, посчитаем, что плотность заряда и скалярный потенциал постоянны в пространстве (и, соответственно, пространственные градиенты равны нулю). Ток и векторный потенциал естественно считать равными нулю, так как никакого выделенного направления в пространстве в такой системе нет (как и выделенных точек в пространстве). Система нелинейных уравнений в этом случае упрощается:

$$\begin{cases} i\hbar\frac{d}{dt}\psi=e\varphi\psi \\ \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\varphi=4\pi e\psi\psi^* \end{cases}$$

Отметим, что в общепринятой вероятностной трактовке квантовой механики заряды фактически остаются точечными, так что приравнивать нулю пространственный градиент потенциала нельзя.

Из 2-го уравнения следует

$$\varphi = 4\pi c^2 e\int_{T_2}^{t} dt'\int_{T_1}^{t'} dt''\psi(t'')\psi^*(t'') =$$

$$= 4\pi c^2 e\int_{T_2}^{t} dt'\int_{T_1}^{t'} dt'' |\psi(t'')|^2$$

Константы T_1 и T_2 фактически являются константами интегрирования.
Подставим в 1-е уравнение системы:

$$\frac{d\psi}{dt} = -i\frac{4\pi e^2c^2}{\hbar}\psi\int_{T_2}^{t} dt'\int_{T_1}^{t'} dt'' |\psi(t'')|^2$$

Попробуем искать решение этого нелинейного интегро-дифференциального уравнения в виде

$$\psi = Be^{-i\beta t^3}$$

Вычислим необходимые для подстановок соотношения:

$$\psi' = -i\beta Be^{-i\beta t^3}3t^2$$

$$|\psi|^2 = |B|^2$$

$$\int_{T_1}^{t'} dt'' |\psi(t'')|^2 = \int_{T_1}^{t'} dt'' |B|^2 = |B|^2\ t' + B_1$$

$$\int_{T_2}^{t} dt'\int_{T_1}^{t'} dt'' |\psi(t'')|^2 = \frac{|B|^2\ t^2}{2} + B_1 t + B_2$$

Пусть для простоты константы B_1 и B_2 равны нулю. Подставим все в уравнение:

$$-i\beta Be^{-i\beta t^3}3t^2 = -i\frac{4\pi e^2c^2}{\hbar}Be^{-i\beta t^3}\frac{|B|^2\ t^2}{2}$$

$$\beta = \frac{4\pi e^2c^2}{\hbar}\frac{|B|^2}{6} = \frac{2\pi e^2c^2}{\hbar}\frac{|B|^2}{3}$$

$$\psi = Be^{-i\frac{2\pi e^2c^2}{\hbar}\frac{|B|^2}{3}t^3} = Be^{-i(\frac{2\pi e^2c^2|B|^2t^2}{3})\frac{1}{\hbar}t}$$

Вспомним, что решением обычного линейного уравнения Шредингера (нестационарного) является функция, пропорциональная величине

$$e^{-i\frac{E}{\hbar}t},$$

где E – энергия частицы.

В нашем случае нелинейного уравнения получается, что энергия частиц (электронов), поле которых образует нескомпенсированную плотность заряда, возрастает с течением времени. Пропорционально второй степени времени. Естественно, этот процесс будет продолжаться лишь до тех пор, пока плотность заряда не скомпенсируется зарядами противоположного знака за счет ненулевой проводимости среды.

Вернемся теперь ко второму уравнению.

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\varphi = 4\pi e\psi\psi^* = 4\pi e|B|^2$$

$$\frac{d}{dt}\varphi = 4\pi ec^2|B|^2\ t$$

Напомню, что постоянные интегрирования мы для простоты полагаем равными нулю.

$$\varphi = 2\pi e c^2 \, | B |^2 \, t^2$$

То-есть потенциал (скалярный) электромагнитного поля также возрастает (квадратично по времени).

Итак, мы имеем своеобразную неустойчивость, возникающую как следствие самого факта взаимодействия электронной и электромагнитной материи. Можно назвать ее неравновесностью пространства. Частично схожими уравнениями, кстати, описывается квадратичное взаимодействие трех осцилляторов (из которого выводятся соотношения Мэнли-Роу) [3,4], но здесь, в отличие от резонансного взаимодействия трех осцилляторов, электромагнитное поле имеет нулевую частоту. Так что этот случай можно считать резонансом электромагнитного поля и электронной материи на нулевой частоте.

Обратим внимание также на то, что для растущего во времени скалярного потенциала и векторного потенциала (равного нулю) не выполняется условие калибровки Лоренца.

Неравновесность пространства, как мы выяснили, появляется, когда пространственные градиенты объемного заряда электронной материи и скалярного потенциала стремятся к нулю.

Чтобы вышеприведенные выкладки были несправедливыми, нужно, чтобы заряды были мелкозернистыми (то-есть точечными), или поверхностными, или линейными. Или чтобы плотность заряда всегда была скомпенсирована зарядами противоположного знака.

Список литературы:

1) А.Д.Власов, «Атом Шрёдингера», УФН том 163 N2, фев. 1993
2) Л.П.Питаевский «К вопросу об «Атоме Шрёдингера»», УФН том 163 N8, авг. 1993
3) М.И.Рабинович, Д.И.Трубецков «Введение в теорию колебаний и волн» М. “Наука” 1984.
4) М.Б.Виноградова, О.В.Руденко, А.П.Сухоруков «Теория волн» » М. “Наука” 1979.
5) А.А.Соколов, Ю.М.Лоскутов, И.М.Тернов «Квантовая механика» М. “Просвещение” 1965.