Китаев А.Е.
(kitaev_a_e@mail.ru)

Скалярное поле (аналог напряжений Пуанкаре) как мода единого уравнения, описывающего и электромагнитные, и электронные волны .

Еще на рубеже 19 и 20 веков было обращено внимание на несогласованность классической теории электромагнетизма, связанную с бесконечной полевой энергией точечного электрона. Один из предложенных путей разрешения этой проблемы – «обрезание» интеграла, с помощью которого вычисляется энергия, то-есть введение нижнего предела, равного «классическому» радиусу электрона. Пуанкаре, также обращавшийся к этой проблеме, высказал предположение, что при расчетах должны учитываться силы, которые удерживают электрон от расталкивания кулоновскими силами. Эти предполагаемые силы называют «напряжения Пуанкаре» [3].

Посмотрим, можно ли что-то прояснить в этой ситуации с помощью уравнения, предложенного автором в 1997 году:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+k_0{}^2U+q\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}[\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2}-2\cos\theta\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2}]\}+$$

$$+3\mu U^2=0 \qquad (1)$$

$$k_0{}^2=\frac{8m^2c^2}{5\hbar^2}$$

$$q=\frac{4m^2c^2}{5\hbar^2}$$

Здесь m – масса покоя электрона.

Это уравнение фактически представляет собой волновое уравнение в пространстве 7 переменных (четыре переменные – это обычные пространство и время, остальные три – это углы Эйлера). Его можно рассматривать как релятивистское (и нелинейное вдобавок) обобщение уравнения, получающегося в результате квантования свободного движения симметричного твердого тела. Предполагается, что помимо обычных граничных условий в угловом пространстве

$$U(\alpha)=U(\alpha+2\pi), \quad U(\beta)=U(\beta+2\pi)$$

могут иметь место более общие условия:

$$U(\alpha)U^*(\alpha)=U(\alpha+2\pi)U^*(\alpha+2\pi)\,; \quad U(\beta)U^*(\beta)=U(\beta+2\pi)U^*(\beta+2\pi)$$

Или

$$U^2(\alpha)=U^2(\alpha+2\pi)\,; \quad U^2(\beta)=U^2(\beta+2\pi)$$

в случае действительной функции U.

Если пренебречь нелинейностью, уравнение за счет двузначных граничных условий в угловом пространстве имеет решения, пропорциональные следующим функциям (представленным в виде вектора-столбца):

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{(\alpha+\beta)}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{-i\frac{(\alpha+\beta)}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{(\alpha-\beta)}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{(\beta-\alpha)}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Уточню, что каждая из этих четырех функций является решением «угловой» части приведенного выше уравнения.

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial E}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}[\frac{\partial^2 E}{\partial\alpha^2}-2\cos\theta\frac{\partial^2 E}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 E}{\partial\beta^2}]=-KE$$

Такие функции-орты можно назвать функциями половинного спина (обратим внимание на множитель ½ в показателях экспонент). Такая двузначность является характерной чертой волновой функции электрона в квантовой механике. И эти функции, согласитесь, весьма напоминают биспиноры в теории Дирака.

Возможна и пропорциональность функциям единичного спина

$$\begin{pmatrix} W_{-1} \\ W_0 \\ W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\beta}\sin\theta \\ \cos\theta \\ e^{i\beta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_{-1} \\ U_0 \\ U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha}\sin\theta \\ \cos\theta \\ e^{i\alpha}\sin\theta \end{pmatrix}$$

Таких функций шесть. Между U_0 и W_0 можно не делать различия. Таким образом число независимых компонент снижается на единицу. Но, если проводить аналогии между этими величинами и электромагнитным потенциалом (также имеющим единичный спин), то бросается в глаза наличие лишней, пятой компоненты.

Все эти решения рассматривались в предыдущих работах, причем было показано, что при учете резонанса в угловом пространстве, возникающего за счет нелинейности, при преобразованиях появляются пять четырехрядных матриц, из которых три точно совпадают с матрицами Дирака. Четвертая с точностью до умножения на мнимую единицу и антисимметричности также совпадает с соответствующей матрицей Дирака. Пятая же матрица совпадает с известной в теории матрицей γ_5, и ей соответствует, как я предположил, псевдоскалярное поле, родственное электромагнитному, излучение которого можно обнаружить в экспериментах с быстропеременным спин-поляризованным током (спин направлен вдоль импульса). Таким образом, при малых величинах полей единичного спина получающиеся уравнения для функций половинного спина можно свести к уравнению Дирака (по крайней мере при взаимодействии с частью компонент поля единичного спина). Но в этих работах не исследовалась чисто скалярная функция-орт, то есть решение уравнения, не зависящее от углов Эйлера (решение с нулевым спином). Скалярная функция-орт с нулевым спином – это просто единица.

Кстати, в данной модели массы покоя полей со спинами больше единицы получаются уже отрицательными.

Решение исходного нелинейного уравнения имеет смысл искать в таком виде:

$$U=e_1(\vec r,t)e^{i\frac{(\alpha+\beta)}{2}}\cos\frac{\theta}{2}+e_2(\vec r,t)e^{-i\frac{(\alpha+\beta)}{2}}\cos\frac{\theta}{2}+e_3(\vec r,t)e^{i\frac{(\alpha-\beta)}{2}}\sin\frac{\theta}{2}+e_4(\vec r,t)e^{i\frac{(\beta-\alpha)}{2}}\sin\frac{\theta}{2}+$$
$$+u_{-1}(\vec r,t)e^{-i\alpha}\sin\theta+2u_0(\vec r,t)\cos\theta+u_1(\vec r,t)e^{i\alpha}\sin\theta+$$
$$+w_{-1}(\vec r,t)e^{-i\beta}\sin\theta+w_1(\vec r,t)e^{i\beta}\sin\theta+s(\vec r,t) \qquad (3)$$

Поле s и есть вышеупомянутое чисто скалярное поле.

При подставлении этого выражения в уравнение (1) за счет нелинейного члена возникнут произведения различных слагаемых. Нашей задачей будет выделить из них части, пропорциональные функциям-ортам. Это и есть резонирование в угловом пространстве, аналогичное пространственному или временному резонансу, рассматриваемому в теории нелинейных колебаний и волн.

В результате мы получим уравнения для полей единичного и половинного спина, взаимодействующих между собой:

$$\frac{1}{c^2}e_{1tt}-e_{1xx}-e_{1yy}-e_{1zz}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}e_1+12\mu e_3w_1+12\mu e_4u_1-12\mu e_1u_0=0$$

$$\frac{1}{c^2}e_{2tt}-e_{2xx}-e_{2yy}-e_{2zz}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}e_2+12\mu e_3u_{-1}+12\mu e_4w_{-1}-12\mu e_2u_0=0$$

$$\frac{1}{c^2}e_{3tt}-e_{3xx}-e_{3yy}-e_{3zz}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}e_3+12\mu e_1w_{-1}+12\mu e_2u_1+12\mu e_3u_0=0$$

$$\frac{1}{c^2}e_{4tt}-e_{4xx}-e_{4yy}-e_{4zz}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}e_4+12\mu e_1u_{-1}+12\mu e_2w_1+12\mu e_4u_0=0$$
$$\frac{1}{c^2}u_{-1tt}-u_{-1xx}-u_{-1yy}-u_{-1zz}+3\mu e_2e_4=0$$
$$\frac{1}{c^2}u_{1tt}-u_{1xx}-u_{1yy}-u_{1zz}+3\mu e_1e_3=0$$
$$\frac{1}{c^2}u_{0tt}-u_{0xx}-u_{0yy}-u_{0zz}+\frac{3}{2}\mu(e_1e_2-e_3e_4)=0$$

$$\frac{1}{c^2}w_{-1tt}-w_{-1xx}-w_{-1yy}-w_{-1zz}+3\mu e_2e_3=0$$
$$\frac{1}{c^2}w_{1tt}-w_{1xx}-w_{1yy}-w_{1zz}+3\mu e_1e_4=0$$

Попробуем найти взаимодействие полей e друг с другом посредством поля U_0 (которое имеет смысл считать продольной частью электромагнитного поля). Если учесть сопряженность различных компонент e и считать, что

$e_1=e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\psi_1(t,r)$, причем зависимость $\psi_1(t,r)$ от времени медленная, то придем к такому нерелятивистскому уравнению, напоминающему уравнение Шредингера:

$$i\hbar\psi_{1t}+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_1+$$

$$+\frac{9\hbar^2}{8\pi m}\mu^2[\int\frac{\{-\psi_1{}^2(t-\frac{|\vec r-\vec r_0|}{c},\vec r_0)-\psi_2{}^2(t-\frac{|\vec r-\vec r_0|}{c},\vec r_0)+\psi_3{}^2(t-\frac{|\vec r-\vec r_0|}{c},\vec r_0)+\psi_4{}^2(t-\frac{|\vec r-\vec r_0|}{c},\vec r_0)\}}{|\vec r-\vec r_0|}d\vec r_0]\psi_1=0$$

Фактически это уравнение описывает кулоновское отталкивание одноименных и притяжение разноименных зарядов.

Кстати, если записать уравнения для e и U_0 в матричном виде и использовать (после ремасштабирования величин полей) лагранжев подход с лагранжианом взаимодействия

$$l_{\text{int}}=\frac{3}{4}\mu e^{+}\alpha_0 eU_0$$

(α_0 - это одна из матриц Дирака), то мы вынуждены будем считать, что лагранжианы для основных частей уравнений имеют разные знаки. Это соответствует известному в релятивистской квантовой теории поля факту отрицательности энергии продольных фотонов. Обычно считают, что из отрицательности энергии продольного поля следует «нефизичность» этих фотонов [1,4]. Но в сверхвысокочастотной электронике концепция отрицательной энергии волны получила признание (например для медленной волны в электронном пучке). Связь двух волн с отрицательной и положительной энергией приводит к неустойчивости и используется для генерации и усиления электромагнитных волн [2].

Если продольную электромагнитную волну все-таки удастся возбудить, то есть основания полагать, что при связывании ее с поперечной волной (или другой волной с положительной энергией), например с помощью какой-либо электродинамической замедляющей системы, возникнет неустойчивость. Вопрос – откуда возьмется энергия для этой неустойчивости? Можно предположить, что за счет нелинейности. Действительно, из квантовой механики следует, что энергия частиц фактически является частотой соответствующих волн. Но обычная квантовая механика является линейной теорией. Характерной особенностью же нелинейных систем является возникновение кратных гармоник. Например, при воздействии на систему с квадратичной нелинейностью сигналом с определенной частотой на выходе мы получим кроме отклика той же частоты еще и вторую гармонику, а также четвертую и более высокие. Амплитуды этих высших гармоник при малой нелинейности будут малыми. Аналогично, если считать «мировое уравнение» нелинейным, будет происходить спонтанное увеличение энергии взаимодействующих частиц, которое будет тем сильнее, чем больше плотность поля этих частиц. Для поля небольшой плотности этим эффектом вполне можно пренебречь.

Вернемся к нелинейному взаимодействию различных мод поля U. Рассмотрим взаимодействие полей половинного спина с чисто скалярным полем. Получаются уравнения

$$\frac{1}{c^2}e_{1tt}-e_{1xx}-e_{1yy}-e_{1zz}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}e_1+6\mu e_1 s=0$$

$$\frac{1}{c^2}e_{2tt}-e_{2xx}-e_{2yy}-e_{2zz}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}e_2+6\mu e_2 s=0$$

$$\frac{1}{c^2}e_{3tt}-e_{3xx}-e_{3yy}-e_{3zz}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}e_3+6\mu e_3 s=0$$

$$\frac{1}{c^2}e_{4tt}-e_{4xx}-e_{4yy}-e_{4zz}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}e_4+6\mu e_4 s=0$$

$$\frac{1}{c^2}s_{tt}-s_{xx}-s_{yy}-s_{0zz}+\frac{8m^2c^2}{5\hbar^2}s+3\mu(e_1e_2+e_3e_4)+3\mu s^2=0$$

А для взаимодействия полей нулевого спина и скалярного поля:

$$\frac{1}{c^2}u_{-1tt}-u_{-1xx}-u_{-1yy}-u_{-1zz}+6\mu u_{-1}s=0$$
$$\frac{1}{c^2}u_{1tt}-u_{1xx}-u_{1yy}-u_{1zz}+6\mu u_1 s=0$$
$$\frac{1}{c^2}u_{0tt}-u_{0xx}-u_{0yy}-u_{0zz}+6\mu u_0 s=0$$

$$\frac{1}{c^2}w_{-1tt}-w_{-1xx}-w_{-1yy}-w_{-1zz}+6\mu w_{-1}s=0$$
$$\frac{1}{c^2}w_{1tt}-w_{1xx}-w_{1yy}-w_{1zz}+6\mu w_1 s=0$$

$$\frac{1}{c^2}s_{tt}-s_{xx}-s_{yy}-s_{0zz}+\frac{8m^2c^2}{5\hbar^2}s+3\mu(u_{-1}u_1+w_{-1}w_1)+3\mu s^2=0$$

Если найти взаимодействие компонент e друг с другом посредством скалярного поля s (а не компоненты поля с единичным спином, как мы делали раньше), то получится короткодействующее притяжение (на масштабе комптоновской длины волны электрона). Если же рассмотреть совокупный эффект и от поля U_0 и от поля s , то получим (запишем соотношение с участием только одной компоненты поля половинного спина):

$$i\hbar\psi_{1t}+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_1+\frac{9\hbar^2}{8\pi m}\mu^2\left[\int\frac{(e^{-RQ\sqrt{\frac{8}{5}}}-1)\psi_1^{\,2}(t-\frac{R}{c},\vec{r}_0)}{R}d\vec{r}_0\right]\psi_1=0$$

$$R=\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|$$

$$Q=\frac{mc}{\hbar}$$

Здесь Q – это величина, обратная комптоновской длине волны электрона.

Видно, что при R близкой к нулю взаимодействие различных частей электронного поля друг с другом не возрастает бесконечно, как в кулоновом случае, а стремится к нулю. Взаимодействие различных элементов электронной материи друг с другом за счет скалярного поля s напоминает стягивающее действие напряжений Пуанкаре.

Скалярное поле s имеет массу покоя чуть большую, чем масса электрона (в $\sqrt{\frac{8}{5}}$ раз). Из уравнений следует, что ожидать его излучения электронами можно в тех же случаях, когда излучается поле U_0 (продольное поле единичного спина).

Список литературы:

1) Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков «Квантовые поля» М. Физматлит, 2005.
2) М.И.Рабинович, Д.И.Трубецков «Введение в теорию колебаний и волн» М. "Наука" 1984.
3) Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс «Фейнмановские лекции по физике», Т 6 М. «Мир» 1977.
4) А.Соколов, Д.Иваненко «Квантовая теория поля» М. Гос.издательство технико-теоретической литературы, 1952.
5) А. С. Давыдов «Квантовая механика» М. "Наука" 1973.