Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Равновесие двухуровневой системы и электромагнитного поля.

Рассмотрим двухуровневую квантовую систему, находящуюся под действием переменного электромагнитного поля. Внешний векторный потенциал будем считать заданным. Учтем, что имеет место постоянное «сползание» системы с верхнего уровня на нижний, обусловленное спонтанным излучением (причем излученные волны беспрепятственно покидают систему, которую можно представить себе излучающим атомом в открытом пространстве). Запишем уравнения для этой системы [см. 2], оставляя лишь те слагаемые с участием векторного потенциала, которые могут дать резонанс (при приближении частоты поля к частоте квантового перехода):

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma C_2^2 C_1 + \dfrac{e}{mc} C_2 e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t} \int \psi^*{}_1 (\vec{A}\nabla)\psi_2 dv, \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma C_1^2 C_2 + \dfrac{e}{mc} C_1 e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} \int \psi^*{}_2 (\vec{A}\nabla)\psi_1 dv. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\gamma = \dfrac{ke^2}{c^3\hbar} w_{21}{}^3 \left|\vec{r}_{21}\right|^2 = \dfrac{2e^2}{3c^3\hbar} w_{21}{}^3 \left|\vec{r}_{21}\right|^2$. (2)

Величины C_i мы будем считать действительными. Для комплексных амплитуд C_i уравнения выглядели бы немного по-другому, вместо квадратов амплитуд в правых частях мы имели бы квадраты модулей:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma \left|C_2\right|^2 C_1 + \dfrac{e}{mc} C_2 e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t} \int \psi^*{}_1 (\vec{A}\nabla)\psi_2 dv, \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma \left|C_1\right|^2 C_2 + \dfrac{e}{mc} C_1 e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} \int \psi^*{}_2 (\vec{A}\nabla)\psi_1 dv. \end{cases} \tag{1a}$$

Векторный потенциал считаем монохроматическим, в объеме нашей системы его зависимостью от пространственных координат пренебрегаем:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos wt, \qquad \vec{A}_0 = const.$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma C_2^2 C_1 + \dfrac{e}{2mc} C_2 e^{iw_{12}t} (e^{iwt} + e^{-iwt}) \vec{A}_0 \int \psi^*{}_1 \nabla \psi_2 dv, \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma C_1^2 C_2 + \dfrac{e}{2mc} C_1 e^{iw_{21}t} (e^{iwt} + e^{-iwt}) \vec{A}_0 \int \psi^*{}_2 \nabla \psi_1 dv. \end{cases}$$

Пусть частота поля строго равна частоте квантового перехода. Оставим лишь резонансный член.

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma C_2^2 C_1 + \dfrac{e}{2mc} C_2 \vec{A}_0 \int \psi^*{}_1 \nabla \psi_2 dv, \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma C_1^2 C_2 + \dfrac{e}{2mc} C_1 \vec{A}_0 \int \psi^*{}_2 \nabla \psi_1 dv. \end{cases}$$

Учтем теперь выражение

$$\nabla = i\frac{\hat{\vec{p}}}{\hbar} = \frac{im}{\hbar}\frac{d\hat{\vec{r}}}{dt}.$$

Тогда система приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma C_2{}^2 C_1 + \dfrac{ew_{21}}{2\hbar c} C_2 \vec{A}_0 \vec{r}_{12}, \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma C_1{}^2 C_2 - \dfrac{ew_{21}}{2\hbar c} C_1 \vec{A}_0 \vec{r}_{21}. \end{cases} \qquad (3)$$

Отметим, что при $\vec{r}_{12} = \vec{r}_{21}$ данная система имеет сохраняющуюся величину – сумму квадратов C_1 и C_2, которую разумно принять равной единице (напомню, что коэффициенты C_i мы считаем действительными). Если учесть это условие нормировки, уравнения системы «расцепятся»:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma(1-C_1{}^2)C_1 + \dfrac{ew_{21}}{2\hbar c}\sqrt{1-C_1{}^2}\,\vec{A}_0 \vec{r}_{12}, \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma(1-C_2{}^2)C_2 - \dfrac{ew_{21}}{2\hbar c}\sqrt{1-C_2{}^2}\,\vec{A}_0 \vec{r}_{21}. \end{cases} \qquad (4)$$

Система, описываемая этими уравнениями, имеет стационарное состояние, которое можно получить, приравняв нулю производные по времени. Сделаем это для первого уравнения (то-есть для амплитуды состояния с меньшей энергией).

$$\gamma(1-C_1{}^2)C_1 + \frac{ew_{21}}{2\hbar c}\sqrt{1-C_1{}^2}\,\vec{A}_0 \vec{r}_{12} = 0.$$

Или

$$(1-C_1{}^2)C_1 = -\frac{ew_{21}}{2\gamma\hbar c}\sqrt{1-C_1{}^2}\,\vec{A}_0 \vec{r}_{12}.$$

Возведем обе части этого соотношения в квадрат:

$$(1-C_1{}^2)^2 C_1{}^2 = \frac{e^2 w_{21}{}^2}{4\gamma^2\hbar^2 c^2}(1-C_1{}^2)(\vec{A}_0 \vec{r}_{12})^2,$$

$$(1-C_1{}^2)C_1{}^2 = \frac{e^2 w_{21}{}^2}{4\gamma^2\hbar^2 c^2}(\vec{A}_0 \vec{r}_{12})^2.$$

Обозначим для простоты

$$C_1{}^2 = x,$$

$$\beta = \frac{e^2 w_{21}{}^2}{4\gamma^2\hbar^2 c^2}(\vec{A}_0 \vec{r}_{12})^2 = \frac{e^2 w_{21}{}^2}{4\gamma^2\hbar^2 c^2}\left|\vec{A}_0\right|^2 \left|\vec{r}_{12}\right|^2 \cos^2\theta_{12}.$$

Учитывая выражение (2), можно записать

$$\beta = \frac{e^2 w_{21}{}^2}{4\hbar^2 c^2}\left|\vec{A}_0\right|^2 \left|\vec{r}_{12}\right|^2 \cos^2\theta_{12}\,\frac{9c^6\hbar^2}{4e^4 w_{21}{}^6 \left|\vec{r}_{21}\right|^4} = \frac{9c^4}{16e^2 w_{21}{}^4 \left|\vec{r}_{21}\right|^2}\left|\vec{A}_0\right|^2 \cos^2\theta_{12}.$$

Для x мы получили квадратное уравнение:

$$x - x^2 = \beta.$$

Решая его, получим:

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4\beta}}{2}.$$

То-есть

$$C_1{}^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - \dfrac{9c^4}{4e^2 w_{21}{}^4 \left|\vec{r}_{21}\right|^2}\left|\vec{A}_0\right|^2 \cos^2\theta_{12}}}{2}. \qquad (5)$$

При равном нулю поле мы имеем верхнее устойчивое стационарное состояние (равное единице) и нижнее неустойчивое (равное нулю). Появление поля приводит к сдвигу этих состояний (по направлению к середине промежутка между 0 и 1, то-есть к ½).

При малом взаимодействии с полем

$$C_1{}^2 \approx 1 - \frac{9c^4}{16e^2 w_{21}{}^4 \left|\vec{r}_{21}\right|^2} \left|\vec{A}_0\right|^2 \cos^2\theta_{12}.$$

Вспоминая условие нормировки, можно записать (в этом же приближении, при стремлении взаимодействия к нулю) выражение для квадрата амплитуды состояния с большей энергией:

$$C_2{}^2 \approx \frac{9c^4}{16e^2 w_{21}{}^4 \left|\vec{r}_{21}\right|^2} \left|\vec{A}_0\right|^2 \cos^2\theta_{12}.$$

Из выражения (5) видно, что стационарные состояния существуют лишь для не очень больших значений поля (пока подкоренное выражение положительно). Граничное (максимальное) значение для поля получается таким образом:

$$\frac{9c^4}{4e^2 w_{21}{}^4 \left|\vec{r}_{21}\right|^2} \left|\vec{A}_0\right|^2 \cos^2\theta_{12} = 1,$$

$$\left|\vec{A}_0\right|^2 = \frac{4e^2 w_{21}{}^4 \left|\vec{r}_{21}\right|^2}{9c^4 \cos^2\theta_{12}},$$

$$\left|\vec{A}_0\right| = \frac{2|e| w_{21}{}^2 \left|\vec{r}_{21}\right|}{3c^2 \left|\cos\theta_{12}\right|}.$$

Квадрат амплитуды при этом равен ½.

Умножая последнее выражение на частоту перехода, деленную на скорость света, можно получить граничное значение для напряженности электрического поля:

$$\left|\vec{E}_0\right| = \frac{2|e| \left|w_{21}\right|^3 \left|\vec{r}_{21}\right|}{3c^3 \left|\cos\theta_{12}\right|}.$$

Аналогичные выкладки, разумеется, можно было бы произвести и для амплитуды состояния с большей энергией. В этом случае неустойчивым является верхнее состояние (равное 1 при нулевом поле).

Список литературы:

1) Лоудон Р. «Квантовая теория света», М. «Мир» 1976
2) Китаев А.Е. «Что такое квант света». Опубл. в Интернете
(сайт science-nighny.narod.ru).