

## Равновесие двухуровневой системы и электромагнитного поля.

Рассмотрим двухуровневую квантовую систему, находящуюся под действием переменного электромагнитного поля. Внешний векторный потенциал будем считать заданным. Учтем, что имеет место постоянное «сползание» системы с верхнего уровня на нижний, обусловленное спонтанным излучением (причем излученные волны беспрепятственно покидают систему, которую можно представить себе излучающим атомом в открытом пространстве). Запишем уравнения для этой системы [см. 2], оставляя лишь те слагаемые с участием векторного потенциала, которые могут дать резонанс (при приближении частоты поля к частоте квантового перехода):

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = \gamma C_2^2 C_1 + \frac{ke}{mc} C_2 e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t} \int \psi_1^* (\vec{A}\nabla) \psi_2 dv, \\ \frac{dC_2}{dt} = -\gamma C_1^2 C_2 + \frac{e}{mc} C_1 e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} \int \psi_2^* (\vec{A}\nabla) \psi_1 dv. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $k=2/3$ , а

$$\gamma = \frac{ke^2}{c^3 \hbar} w_{21}^3 |\vec{r}_{21}|^2 = \frac{2e^2}{3c^3 \hbar} w_{21}^3 |\vec{r}_{21}|^2. \quad (2)$$

Векторный потенциал – монохроматический, в объеме нашей системы его зависимость от пространственных координат пренебрегаем:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos wt, \quad \vec{A}_0 = const.$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = \gamma C_2^2 C_1 + \frac{ke}{2mc} C_2 e^{iw_{21}t} (e^{iwt} + e^{-iwt}) \vec{A}_0 \int \psi_1^* \nabla \psi_2 dv, \\ \frac{dC_2}{dt} = -\gamma C_1^2 C_2 + \frac{ke}{2mc} C_1 e^{iw_{21}t} (e^{iwt} + e^{-iwt}) \vec{A}_0 \int \psi_2^* \nabla \psi_1 dv. \end{cases}$$

Пусть частота поля строго равна частоте квантового перехода. Оставим лишь резонансный член.

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = \gamma C_2^2 C_1 + \frac{ke}{2mc} C_2 \vec{A}_0 \int \psi_1^* \nabla \psi_2 dv, \\ \frac{dC_2}{dt} = -\gamma C_1^2 C_2 + \frac{ke}{2mc} C_1 \vec{A}_0 \int \psi_2^* \nabla \psi_1 dv. \end{cases}$$

Учтем теперь выражение

$$\nabla = i \frac{\hat{p}}{\hbar} = \frac{im}{\hbar} \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Тогда система приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = \gamma C_2^2 C_1 + \frac{kew_{21}}{2\hbar c} C_2 \vec{A}_0 \vec{r}_{12}, \\ \frac{dC_2}{dt} = -\gamma C_1^2 C_2 - \frac{kew_{21}}{2\hbar c} C_1 \vec{A}_0 \vec{r}_{21}. \end{cases} \quad (3)$$

Если учесть условие нормировки для коэффициентов  $C$ , уравнения системы «расцепятся»:

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = \gamma(1-C_1^2)C_1 + \frac{kew_{21}}{2\hbar c} \sqrt{1-C_1^2} \vec{A}_0 \vec{r}_{12}, \\ \frac{dC_2}{dt} = -\gamma(1-C_2^2)C_2 - \frac{kew_{21}}{2\hbar c} \sqrt{1-C_2^2} \vec{A}_0 \vec{r}_{21}. \end{cases} \quad (4)$$

Система, описываемая этими уравнениями, имеет стационарное состояние, которое можно получить, приравняв нулю производные по времени. Сделаем это для первого уравнения (то-есть для амплитуды состояния с меньшей энергией).

$$\gamma(1-C_1^2)C_1 + \frac{kew_{21}}{2\hbar c} \sqrt{1-C_1^2} \vec{A}_0 \vec{r}_{12} = 0.$$

Или

$$(1-C_1^2)C_1 = -\frac{kew_{21}}{2\gamma\hbar c} \sqrt{1-C_1^2} \vec{A}_0 \vec{r}_{12}.$$

Возведем обе части этого соотношения в квадрат:

$$(1-C_1^2)^2 C_1^2 = \frac{k^2 e^2 w_{21}^2}{4\gamma^2 \hbar^2 c^2} (1-C_1^2) (\vec{A}_0 \vec{r}_{12})^2,$$

$$(1-C_1^2) C_1^2 = \frac{k^2 e^2 w_{21}^2}{4\gamma^2 \hbar^2 c^2} (\vec{A}_0 \vec{r}_{12})^2.$$

Обозначим для простоты

$$C_1^2 = x,$$

$$\beta = \frac{k^2 e^2 w_{21}^2}{4\gamma^2 \hbar^2 c^2} (\vec{A}_0 \vec{r}_{12})^2 = \frac{\left(\frac{4}{9}\right) e^2 w_{21}^2}{4\gamma^2 \hbar^2 c^2} |\vec{A}_0|^2 |\vec{r}_{12}|^2 \cos^2 \theta_{12}.$$

Учитывая выражение (2), можно записать

$$\beta = \frac{e^2 w_{21}^2}{9\hbar^2 c^2} |\vec{A}_0|^2 |\vec{r}_{12}|^2 \cos^2 \theta_{12} \frac{9c^6 \hbar^2}{4e^4 w_{21}^6 |\vec{r}_{21}|^4} = \frac{c^4}{4e^2 w_{21}^4 |\vec{r}_{21}|^2} |\vec{A}_0|^2 \cos^2 \theta_{12}.$$

Для  $x$  мы получили квадратное уравнение:

$$x - x^2 = \beta.$$

Решая его, получим:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\beta}}{2}.$$

То-есть

$$C_1^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{c^4}{e^2 w_{21}^4 |\vec{r}_{21}|^2} |\vec{A}_0|^2 \cos^2 \theta_{12}}}{2}. \quad (5)$$

При равном нулю поле мы имеем верхнее устойчивое стационарное состояние (равное единице) и нижнее неустойчивое (равное нулю). Появление поля приводит к сдвигу этих состояний (по направлению к середине промежутка между 0 и 1, то-есть к  $1/2$ ).

При малом взаимодействии с полем

$$C_1^2 \approx 1 - \frac{c^4}{4e^2 w_{21}^4 |\vec{r}_{21}|^2} |\vec{A}_0|^2 \cos^2 \theta_{12}.$$

Вспоминая условие нормировки, можно записать (в этом же приближении, при стремлении взаимодействия к нулю) выражение для квадрата амплитуды состояния с большей энергией:

$$C_2^2 \approx \frac{c^4}{4e^2 w_{21}^4 |\vec{r}_{21}|^2} |\vec{A}_0|^2 \cos^2 \theta_{12}.$$

Из выражения (5) видно, что стационарные состояния существуют лишь для не очень больших значений поля (пока подкоренное выражение положительно). Граничное (максимальное) значение для поля получается таким образом:

$$\frac{c^4}{e^2 w_{21}^4 |\vec{r}_{21}|^2} |\vec{A}_0|^2 \cos^2 \theta_{12} = 1,$$

$$|\vec{A}_0|^2 = \frac{e^2 w_{21}^4 |\vec{r}_{21}|^2}{c^4 \cos^2 \theta_{12}},$$

$$|\vec{A}_0| = \frac{|e| w_{21}^2 |\vec{r}_{21}|}{c^2 |\cos \theta_{12}|}.$$

Квадрат амплитуды при этом равен  $1/2$ .

Умножая последнее выражение на частоту перехода, деленную на скорость света, можно получить граничное значение для напряженности электрического поля:

$$|\vec{E}_0| = \frac{|e| |w_{21}|^3 |\vec{r}_{21}|}{c^3 |\cos \theta_{12}|}.$$

Аналогичные выкладки, разумеется, можно было бы произвести и для амплитуды состояния с большей энергией. В этом случае неустойчивым является верхнее состояние (равное 1 при нулевом поле).

Список литературы:

- 1) Лоудон Р. «Квантовая теория света», М. «Мир» 1976
- 2) Китаев А.Е. «Что такое квант света». Оpubл. в Интернете (сайт science-nighny.narod.ru).