Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Температура двухуровневой системы.

Мы продолжим рассмотрение двухуровневой квантовой системы, находящейся под действием гармонического электромагнитного поля с постоянной амплитудой. В работе [1] уже были записаны соответствующие нелинейные уравнения. Для векторного потенциала там было использовано следующее выражение:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos wt, \quad \vec{A}_0 = const. \tag{1}$$

Перепишем уравнения уже в преобразованном виде (сохранены лишь члены, дающие резонанс с частотой перехода, кроме того – отброшены быстроосциллирующие слагаемые):

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma C_2{}^2 C_1 + \dfrac{qew_{21}}{2\hbar c} C_2 \vec{A}_0 \vec{r}_{12}, \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma C_1{}^2 C_2 - \dfrac{qew_{21}}{2\hbar c} C_1 \vec{A}_0 \vec{r}_{21}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь

$$q = \frac{2}{3},$$

$$\gamma = \frac{qe^2}{c^3\hbar} w_{21}{}^3 \left|\vec{r}_{21}\right|^2 = \frac{2e^2}{3c^3\hbar} w_{21}{}^3 \left|\vec{r}_{21}\right|^2.$$

В статье [1] мы искали стационарное состояние, приравняв производные по времени нулю. Запишем уравнение для C_1 (первое в системе (2)):

$$\gamma C_2{}^2 C_1 + \vec{A}_0 \vec{R} C_2 = 0.$$

Здесь $\vec{R} = \dfrac{qew_{21}}{2\hbar c} \vec{r}_{12}$.

С учетом нормировочного условия оно примет следующий вид:

$$\gamma(1 - C_1{}^2) C_1 + \vec{A}_0 \vec{R} \sqrt{1 - C_1{}^2} = 0. \tag{3}$$

Или:

$$\sqrt{1 - C_1{}^2}\, C_1 = -\frac{\vec{A}_0 \vec{R}}{\gamma}. \tag{4}$$

После возведения в квадрат:

$$(1 - C_1{}^2) C_1^2 = \beta,$$

$$\beta = \frac{(\vec{A}_0 \vec{R})^2}{\gamma^2}. \tag{5}$$

Решение:

$$C_1{}^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\beta}}{2}. \tag{6}$$

В конечном итоге

$$
\begin{aligned}
&C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{(\vec{A}_0\vec{R})^2}{\gamma^2}}}, \\
&C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 \mp \sqrt{1 - 4\frac{(\vec{A}_0\vec{R})^2}{\gamma^2}}}.
\end{aligned} \qquad (7)
$$

Выберем для определенности верхний знак (для каждой строки). Запишем частное квадратов этих величин:

$$
\frac{C_2^{\ 2}}{C_1^{\ 2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\frac{(\vec{A}_0\vec{R})^2}{\gamma^2}}}{1 + \sqrt{1 - 4\frac{(\vec{A}_0\vec{R})^2}{\gamma^2}}}. \qquad (8)
$$

Квадрат амплитуды можно рассматривать как вероятность нахождения частицы на соответствующем энергетическом уровне. Вспомним далее вывод формулы Планка для спектральной плотности излучения в двухуровневой системе, данный, например в [3]. Там используется распределение Больцмана для концентраций частиц (атомов) на энергетических уровнях 1 и 2:

$$
\begin{aligned}
&N_1 = Be^{-\frac{E_1}{kT}}, \\
&N_2 = Be^{-\frac{E_2}{kT}},
\end{aligned} \qquad (9)
$$

где B – нормировочная постоянная.

Фактически частное квадратов амплитуд, записанное нами выше (формула (8)), мы можем приравнять величине

$$
e^{-\frac{(E_2 - E_1)}{kT}}.
$$

То-есть

$$
\frac{1 - \sqrt{1 - 4\frac{(\vec{A}_0\vec{R})^2}{\gamma^2}}}{1 + \sqrt{1 - 4\frac{(\vec{A}_0\vec{R})^2}{\gamma^2}}} = e^{-\frac{(E_2 - E_1)}{kT}}.
$$

Возьмем натуральный логарифм от обеих частей:

$$
\ln\frac{1 - \sqrt{1 - 4\frac{(\vec{A}_0\vec{R})^2}{\gamma^2}}}{1 + \sqrt{1 - 4\frac{(\vec{A}_0\vec{R})^2}{\gamma^2}}} = \ln(1 - \sqrt{1 - 4\frac{(\vec{A}_0\vec{R})^2}{\gamma^2}}) - \ln(1 + \sqrt{1 - 4\frac{(\vec{A}_0\vec{R})^2}{\gamma^2}}) = -\frac{(E_2 - E_1)}{kT}.
$$

Окончательно можно записать равенство для температуры:

$$
T = \frac{\frac{E_2 - E_1}{k}}{\ln(1 + \sqrt{1 - 4\frac{(\vec{A}_0\vec{R})^2}{\gamma^2}}) - \ln(1 - \sqrt{1 - 4\frac{(\vec{A}_0\vec{R})^2}{\gamma^2}})}.
$$

Вывод: температура выражается через энергии квантовых уровней и амплитуду электромагнитного воздействия на систему. Состояние равновесия между двухуровневой системой и монохроматическим резонансным электромагнитным полем вполне можно описать, используя понятия термодинамики. Получается, что предельные точки, к которым стремятся решения уравнений системы (2), соответствуют состоянию термодинамического равновесия.

ДОПОЛНЕНИЕ. Напомню - мы рассматриваем гармоническое воздействие с постоянной амплитудой. Но на реальные системы в природе, по-видимому, помимо почти постоянных по амплитуде гармонических электромагнитных волн действуют и плавно модулированные импульсы (с заполнением также на резонансной частоте). Ряд возможных примеров был рассмотрен в статье [2]. Именно взаимодействие с такими импульсами может привести к полному перебросу системы на верхний уровень (и к обратному сбросу на нижний). Случайное действие подобных импульсов (принимаемое современной теорией за столкновения с квантами) моделируется наличием конечной спектральной плотности у электромагнитного излучения. Именно конечной, так как гармоническая функция с постоянной амплитудой имеет бесконечную (дельта-образную) спектральную плотность.

Конечно, нужно помнить, что к равновесному состоянию может привести не только взаимодействие двухуровневой системы с электромагнитным полем, но и другие каналы взаимодействий (например с векторным полем упругих деформаций). Но этот вопрос требует дальнейших исследований и не будет рассматриваться в данной маленькой статье.

Список литературы:

1) Китаев А.Е. «Равновесие двухуровневой системы и электромагнитного поля». Опубл. в Интернете (сайт science-nighny.narod.ru).
2) Китаев А.Е. «Воздействие плавно модулированных импульсов на двухуровневую систему». Опубл. в Интернете (сайт science-nighny.narod.ru).
3) Матвеев А.Н. «Оптика», М. «Высшая школа» 1985