Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Частные случаи преобразования биспиноров.

В предыдущей работе «Спиноры и сферические координаты векторы, часть 3» мы уже рассматривали четырехкомпонентный объект, обе «половинки» которого преобразовывались при пространственных поворотах по одному и тому же закону. В современной физике считается, что с помощью похожих объектов (их называют биспинорами) описываются релятивистские электроны. Я здесь не претендую на то, что рассматриваемые далее законы преобразования при поворотах совпадают с законами преобразования реального электронно-позитронного поля. Но все же вероятность этого нельзя исключить. Можно, в частности, высказать довольно разумное предположение, что частицы разных знаков должны преобразовываться по разным законам. Должны же они чем-то отличаться! Почему бы не этим в том числе? Попробуем исследовать ряд возможных случаев преобразований.

1.

Столбец из четырех величин (будем называть их компонентами биспинора) разбивается на 2 подстолбца (из величин 1-2 и 3-4). Величины из этих подстолбцов при поворотах преобразуются независимо друг от друга. Приведем соответствующую матрицу

$$S' = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} & 0 & 0 \\ e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} & e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} & e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & -e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} & e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} S$$

Образуем из 4-х величин другие три по таким формулам

$$D_1 = S_1S_3 + S_2S_4$$

$$D_2 = i(S_1S_3 - S_2S_4)$$

$$D_3 = S_1S_4 - S_2S_3$$

Эти формулы можно записать в матричном виде (с помощью вектора-столбца из матриц)

$$D_1 = \frac{1}{2}S^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} S$$

$$D_2=\frac{1}{2}S^T\begin{pmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&-i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix}S$$

$$D_3=\frac{1}{2}S^T\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}S$$

Вышеупомянутый вектор-столбец из матриц мы будем обозначать E_1 (кстати, компоненты-матрицы в отличие от числовых компонент обычных векторов не преобразуются при поворотах пространства). В дальнейших формулах, где матричный вектор сочетается с обычным вектором наподобие скалярного произведения двух векторов, мы будем обозначать его “шапочкой” и стрелочкой сверху.

Выпишем матрицу, с помощью которой преобразуются эти три получающиеся из биспинора величины

$$D'=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\sin\gamma+\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha & \cos\alpha\sin\gamma+\cos\gamma\cos\beta\sin\alpha & \cos\gamma\sin\beta\\ -\sin\alpha\cos\gamma-\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha & \cos\alpha\cos\gamma-\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha & -\sin\gamma\sin\beta\\ -\sin\beta\cos\alpha & -\sin\beta\sin\alpha & \cos\beta\end{pmatrix}D \quad (1)$$

Видно, что эти 3 величины представляют из себя трехмерный вектор.

Можно ли получить из вектора и такого биспинора другой биспинор (в каком-то смысле это процесс обратен получению вектора из биспинора)? Можно, если использовать, например, такую формулу (если быть точным, то биспинор получается здесь не из вектора и биспинора, а из вектора и комплексно сопряженного биспинора):

$$S_1=\vec{A}\vec{\hat{E}}_1^*S_0^*$$

В этой формуле присутствует вектор-столбец из матричных величин, комплексно сопряженный вектору-столбцу, при помощи которого мы получали вектор D (см. выше). Повторим, что при повороте компоненты этого вектора из матриц не преобразуются!

2.

Рассмотрим другой возможный закон преобразования компонент биспинора при поворотах. Столбец точно таким же образом разбивается на 2 подстолбца, но матрицы их преобразований отличаются уже не положением синуса с обратным знаком, а комплексным сопряжением. Приведем матрицу:

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} & 0 & 0\\ e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} & e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2}\\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}$$

Векторные величины образуются из биспинорных по таким формулам

$D_1 = S_1S_4 + S_2S_3$

$D_2 = i(S_1S_4 - S_2S_3)$

$D_3 = S_1S_3 - S_2S_4$

Или, в матричном виде:

$$D_1 = \frac{1}{2}S^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S$$

$$D_2 = \frac{1}{2}S^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S$$

$$D_3 = \frac{1}{2}S^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} S$$

Биспинор из вектора и другого биспинора для этого случая здесь не вычисляем.

3.

Пусть теперь биспинор разбивается на подстолбцы по-другому (подстолбцы как-бы перемешаны: 1-4 и 2-3). Приведем матрицу преобразования:

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} & 0 & 0 & -e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} & 0 \\ e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} & 0 & 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Векторные величины в этом случае образуются из биспинорных по таким формулам

$D_1 = S_2S_4 + S_1S_3$

$D_2 = i(S_1S_3 - S_2S_4)$

$D_3 = S_1S_2 - S_3S_4$

Или, используя матричный вид:

$$D_1 = \frac{1}{2}S^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} S$$

$$D_2=\frac{1}{2}S^T\begin{pmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&-i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix}S$$

$$D_3=\frac{1}{2}S^T\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}S$$

Биспинор из вектора и другого биспинора можно получить при помощи следующей формулы

$$S_1=\vec{A}\vec{\hat{E}}_2^*S_0^*$$

Здесь E_2 тоже вектор из матриц, с помощью которого получаются величины D.

А таким образом мы получаем скалярную величину:

$$R=S^{*T}\vec{A}\vec{\hat{E}}_2^*S^*$$

4.

Теперь, если считать, что

$$S_1^*=S_2\,,\qquad S_3^*=S_4\,,\qquad (3)$$

можно прийти к таким формулам для получения вектора из биспинора:

$$D_1=\frac{1}{2}S^{*T}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}S$$

$$D_2=\frac{1}{2}S^{*T}\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}S$$

$$D_3=\frac{1}{2}S^{*T}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}S$$

Обратим внимание, что перед матрицей стоит не только транспонированный, но и комплексно сопряженный биспинор S.

Первые две компоненты матричного вектора-столбца совпадают с двумя матрицами Дирака. В дальнейших формулах этот вектор будет обозначен как E_3. Кстати, если у этого матричного вектора-столбца последнюю, третью компоненту сделать равной третьей матрице Дирака (α_3), то получающаяся величина не будет преобразовываться по правилам (1), то-есть как трехмерный вектор.

Уточним, что биспинор S преобразуется при поворотах с помощью той же матрицы (2). Проверка показывает, что в качестве компонент биспинора можно брать любые величины, не обязательно ограничивая себя соотношениями (3).

Любопытно – величина

$$D_3 = \frac{1}{2}(S_1^{*T} S_1 + S_2^{*T} S_2 - S_3^{*T} S_3 - S_4^{*T} S_4)$$

при указанном выше законе преобразования (2) биспинора является z-компонентой вектора. А при законе преобразования, рассмотренном в работе «Спиноры и сферические координаты векторы, часть 3» она являлась скаляром!

Биспинор из вектора и другого биспинора получается так (заметим, что в формуле нет комплексных сопряжений):

$$S_1 = \vec{A}\vec{\hat{E}}_3 S_0$$

А такая величина

$$R = S^{*T} \vec{A}\vec{\hat{E}}_3 S$$

является скаляром. Заметим, что она напоминает вычисляемые в квантовой механике средние значения операторов.

Список литературы:

1) А.А.Соколов, Ю.М.Лоскутов, И.М.Тернов «Квантовая механика» М. “Просвещение” 1965.
2) А. С. Давыдов «Квантовая механика» М. “Наука” 1973.