Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Спиноры и сферические координаты вектора (продолжение, часть 3).

В этой работе мы будем иметь дело с 4-компонентным объектом. В предыдущей статье мы назвали похожий объект «биспинором». Но здесь мы зададим другой закон преобразования его компонент при вращениях системы координат.

$s' = Fs$

$$F = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\gamma}{2}} \cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\gamma}{2}} \sin\frac{\beta}{2} & 0 & 0 \\ e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\frac{\gamma}{2}} \sin\frac{\beta}{2} & e^{-i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\frac{\gamma}{2}} \cos\frac{\beta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\gamma}{2}} \cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\gamma}{2}} \sin\frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\frac{\gamma}{2}} \sin\frac{\beta}{2} & e^{-i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\frac{\gamma}{2}} \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Как видно, матрицы 2x2 в диагональных клетках «большой» матрицы совпадают.

Теперь образуем из компонент нашего объекта такие величины:

$$D_x = \frac{S_1^* S_4 + S_2^* S_3 + S_3^* S_2 + S_4^* S_1}{2}$$

$$D_y = i\left(\frac{-S_1^* S_4 + S_2^* S_3 - S_3^* S_2 + S_4^* S_1}{2}\right)$$

$$D_z = \frac{S_1^* S_3 - S_2^* S_4 + S_3^* S_1 - S_4^* S_2}{2}$$

Посредством вычислений на компьютере можно показать, что эти величины будут преобразовываться как вектор. С использованием матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\gamma\cos\beta\cos\alpha & \cos\alpha\sin\gamma + \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha & \cos\gamma\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta\cos\alpha & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta\sin\alpha & -\sin\gamma\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\alpha & -\sin\beta\sin\alpha & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (2)$$

Если присмотреться, то выписанные выше величины D_i получаются с помощью матриц, известных в релятивистской квантовой механике как матрицы Дирака.

Кстати, я пытался преобразовывать 4-компонентную величину таким же образом, как и в предыдущей статье, но получить похожий вектор мне не удалось. Может у вас получится?

Можно также поинтересоваться поведением при поворотах следующих величин:

$$D_0 = \frac{S_1^* S_1 + S_2^* S_2 - S_3^* S_3 - S_4^* S_4}{2}$$

$$D = \frac{S_1^* S_3 + S_2^* S_4 + S_3^* S_1 + S_4^* S_2}{2}$$

Они не изменяются при поворотах. То-есть являются скалярами. Насчет второй величины имеется большое подозрение, что она псевдоскалярна, но этот факт я не проверял.

Далее я сделаю попытку перекинуть мостик к моим предыдущим исследованиям. В статье «Описание электронно-позитронных волн и электромагнитного поля с помощью единого уравнения. Возможность существования псевдоскалярного поля, родственного электромагнитному» (размещена в интернете на сайте science-nighny.narod.ru) было введено уравнение в 7-мерном пространстве, 4 координаты которого представляют собой обычное пространство-время, а оставшиеся 3 – это углы Эйлера. Решение уравнения можно искать в виде разложения по функциям-ортам, зависящим от углов Эйлера. Разложение по четырем функциям-ортам половинного спина весьма напоминает биспинор, три из пяти компонент разложения по функциям-ортам единичного спина напоминают введенный ранее (в первой статье этой серии) спин-объект.

Для компонент с единичным спином можно получить уравнения (уже для 4-мерного пространства-времени)

$$\frac{1}{c^2} u_{-1tt} - u_{-1xx} - u_{-1yy} - u_{-1zz} + 3\mu e_2 e_4 = 0$$

$$\frac{1}{c^2} u_{1tt} - u_{1xx} - u_{1yy} - u_{1zz} + 3\mu e_1 e_3 = 0$$

$$\frac{1}{c^2} u_{0tt} - u_{0xx} - u_{0yy} - u_{0zz} + \frac{3}{2}\mu(e_1 e_2 - e_3 e_4) = 0$$

$$\frac{1}{c^2} w_{-1tt} - w_{-1xx} - w_{-1yy} - w_{-1zz} + 3\mu e_2 e_3 = 0$$

$$\frac{1}{c^2} w_{1tt} - w_{1xx} - w_{1yy} - w_{1zz} + 3\mu e_1 e_4 = 0$$

Произведем над компонентами единичного спина такие преобразования

$$w_1 = B_1 + iB_2$$

$$w_{-1} = B_1 - iB_2$$

$$u_1 = A_1 + iA_2$$

$$u_{-1} = A_1 - iA_2$$

$$u_0 = A_0$$

Они соответствуют переходу от спин-объекта (или от так называемых сферических координат вектора) к обычным трехмерным координатам. Далее можно попробовать считать, что

$$e_1^* = e_2$$

$$e_3^* = e_4 \qquad (3)$$

По-видимому, при этом преобразовании неявным образом задействуется вектор, соответствующий вращению функций-ортов (обладающих спином), в данном случае направленный вдоль оси z. И в результирующих выражениях геометрическая природа компонент изменяется. Правые части уравнений для A_1,A_2,A_0,B_1,B_2 соответственно пропорциональны величинам

$$\frac{1}{2}(e_1^*e_4 + e_2^*e_3 + e_3^*e_2 + e_4^*e_1)$$

$$\frac{1}{2i}(-e_1^*e_4 + e_2^*e_3 - e_3^*e_2 + e_4^*e_1)$$

$$\frac{1}{2}(e_1^*e_1 + e_2^*e_2 - e_3^*e_3 - e_4^*e_4)$$

(4)

$$\frac{1}{2}(e_1^*e_3 + e_2^*e_4 + e_3^*e_1 + e_4^*e_2)$$

$$\frac{1}{2i}(-e_1^*e_3 + e_2^*e_4 + e_3^*e_1 - e_4^*e_2)$$

Попробуем считать компоненты e_i биспинором, преобразующимся при поворотах по закону (1). Кроме того попробуем «из воздуха» сконструировать еще одну компоненту, равную нулю в данных координатах:

$$\frac{1}{2}(e_1e_4 - e_1e_4 + e_2e_3 - e_2e_3) = 0$$

Если учесть соотношения (3), то это выражение примет вид

$$\frac{1}{2}(e_2^*e_4 - e_3^*e_1 - e_1^*e_3 + e_4^*e_2) \qquad (5)$$

Далее с помощью компьютерных вычислений можно показать, что первое и второе из выражений (4) в совокупности с выражением (5) будут преобразовываться с помощью матрицы (2), где все углы имеют противоположный знак (то есть фактически будут компонентами трехмерного вектора). Это при изменении e_i как биспинора, напомню. Третье и четвертое выражения (4) будут оставаться постоянными при таких поворотах. С геометрической природой последнего из соотношений (4) разобраться сложнее. Это соотношение равно нулю при действительных значениях e_i и отлично от нуля, когда наряду с действительными компонентами присутствуют и комплексные (с учетом равенств (3)). Немного прояснить дело помогает внимательный просмотр главы «Тензорная размерность матриц Дирака» из книги [3]. Возникает мысль - также «из воздуха» создать два соотношения, равных нулю в данной системе координат. В итоге получим 3 соотношения, из которых последнее совпадает с изначальным, а первые 2 – нулевые в данной системе координат.

$$\frac{1}{2i}(e_1^*e_4 - e_3^*e_2 + e_2^*e_3 - e_4^*e_1)$$

$$\frac{1}{2}(e_1^*e_4 - e_3^*e_2 - e_2^*e_3 + e_4^*e_1)$$

$$\frac{1}{2i}(-e_1^*e_3 + e_2^*e_4 + e_3^*e_1 - e_4^*e_2)$$

Оказывается, что эти 3 величины также преобразуются как вектор.

Список литературы:

1) А.А.Соколов, Ю.М.Лоскутов, И.М.Тернов «Квантовая механика» М. “Просвещение” 1965.
2) А. С. Давыдов «Квантовая механика» М. “Наука” 1973.
3) А.Соколов, Д.Иваненко «Квантовая теория поля» Москва, Ленинград, «Государственное издательство технико-теоретической литературы» 1952.