Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Спиноры и сферические координаты вектора (продолжение).

В этой работе мы продолжим тему, начатую в статье «Спиноры и сферические координаты вектора». Там мы образовали из компонент спинора так называемый спин-объект (его компоненты в литературе называют «сферическими компонентами вектора»). Попробуем от спин-объекта перейти к обычному вектору. Получим такую формулу, с помощью которой трехмерный вектор выражается через спинор

$$D_x = i\frac{S_2S_1^* - S_1S_2^*}{2}$$

$$D_y = \frac{S_2S_1^* + S_1S_2^*}{2}$$

$$D_z = \frac{S_1S_1^* - S_2S_2^*}{2}$$

Или, в матричном виде:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} S_1^* & S_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} S_1^* & S_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} S_1^* & S_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} S_1^* & S_2^* \end{pmatrix}\vec{\hat{\varepsilon}}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1}$$

В последней строке набор трех матриц 2x2 записан как вектор-оператор «эпсилон», хотя его компоненты-матрицы никак не преобразуются при повороте:

$$\vec{\hat{\varepsilon}} = \vec{i}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + \vec{j}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \vec{k}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

В предыдущей статье было также введено «смешанное» произведение спин-объекта и спинора. Перейдем к аналогичному произведению вектора и спинора:

$$d_1 = \frac{s_1C_z^*}{2} + i\frac{s_2C_x^*}{2} + \frac{s_2C_y^*}{2}$$

$$d_2 = -\frac{s_2C_0^*}{2} - i\frac{s_1C_x^*}{2} + \frac{s_1C_y^*}{2}$$

Это можно записать так

$$\begin{aligned}d &= \frac{C_z^*}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} + \frac{C_x^*}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} + \frac{C_y^*}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\vec{C}^*\vec{\hat{\varepsilon}}s\end{aligned} \tag{2}$$

Все эти формулы можно проверить относительно несложными вычислениями на компьютере.

Пусть спинор d получается в результате «смешанного» произведения вектора A и спинора s, но спинор s в свою очередь является результатом аналогичного «смешанного» произведения вектора B и спинора q. Тогда несложно показать, что

$$d = \frac{1}{4}\left(\vec{A}^*\vec{B}^*\right)q + \frac{i}{4}\left[\vec{A}^*\vec{B}^*\right]\vec{\hat{\varepsilon}}q$$

Обратим внимание, что оператор «эпсилон» весьма напоминает векторный оператор момента импульса, составленный из матриц Паули (известный из квантовой механики).

$$\vec{\hat{\sigma}} = \vec{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \vec{j}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \vec{k}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Что будет, если вместо оператора «эпсилон» в формулы, выражающие вектор через спинор, подставить оператор «сигма» с матрицами Паули? Оказывается, что мы будем вынуждены принять для координат вектора другой закон преобразования при повороте, соответствующий другой линии узлов:

$$A = \begin{pmatrix} -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\gamma\cos\beta\cos\alpha & \cos\alpha\sin\gamma + \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha & \cos\gamma\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta\cos\alpha & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta\sin\alpha & -\sin\gamma\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\alpha & -\sin\beta\sin\alpha & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (3)$$

Закон же преобразования компонент спинора мы оставляем прежним (хотя, возможно, можно было бы изменить лишь его, оставив неизменным преобразование вектора – этот вопрос требует дальнейшего исследования). Напомню, что первоначальные матрицы для преобразований спинора и вектора приведены в предыдущей статье.

И, наконец, можно попробовать вместо спинора рассмотреть биспинор, состоящий из 4-х компонент. Пусть первые две компоненты преобразуются при поворотах только друг через друга (как и последние две). Преобразование последних двух компонент осуществим при помощи той же матрицы, что и преобразование спинора (матрица F в предыдущей статье). А первые две компоненты преобразуем с помощью комплексно сопряженной матрицы. Приведем здесь для наглядности эту матрицу (4x4):

$$s' = Fs$$

$$F = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} & 0 & 0 \\ e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} & e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Тогда с помощью биспинора (преобразующегося при поворотах с помощью этой матрицы) можно получить вектор таким образом:

$$D_x = \frac{S_1 S_4 + S_2 S_3}{2}$$

$$D_y = i\frac{S_2 S_3 - S_1 S_4}{2}$$

$$D_z = \frac{S_1 S_3 - S_2 S_4}{2}$$

Этот вектор будет преобразовываться при поворотах с помощью матрицы (3).

Список литературы:

1) Г. Голдстейн «Классическая механика» М. “Наука” 1975.
2) А. С. Давыдов «Квантовая механика» М. “Наука” 1973.