Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Спиноры и сферические координаты вектора.

С помощью компьютера достаточно легко запрограммировать некоторые вычисления с векторами, матрицами и величинами, родственными спинорам.

Обратимся сперва к векторным формулам. При переходе от одного прямоугольного базиса к другому (т.е.фактически при повороте базиса, причем этот поворот параметризован через углы Эйлера) новые координаты трехмерного вектора выражаются через старые с помощью такой формулы:

$X' = AX$

(здесь новые координаты – штрихованные)

Матрица A так зависит от углов Эйлера:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta\sin\alpha & \sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta\cos\alpha & \sin\gamma\sin\beta \\ -\cos\alpha\sin\gamma - \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha & -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\gamma\cos\beta\cos\alpha & \cos\gamma\sin\beta \\ \sin\beta\sin\alpha & -\sin\beta\cos\alpha & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (1)$$

Эту формулу можно, в частности, найти в книге Голдстейна [1].

Перейдем теперь от трехмерного вектора a к новому геометрическому объекту по формулам:

$$C_{-1} = \frac{a_x - ia_y}{\sqrt{2}},$$

$$C_1 = \frac{a_x + ia_y}{\sqrt{2}},$$

$$C_0 = a_z$$

a_i – это координаты обычного трехмерного вектора.

Выпишем обратные преобразования:

$$a_x = \frac{C_1 + C_{-1}}{\sqrt{2}},$$

$$a_y = \frac{C_1 - C_{-1}}{i\sqrt{2}},$$

$$a_z = C_0$$

Что это за новый геометрический объект? В книге Давыдова [2] он фигурирует в качестве «сферических координат вектора». Мы же назовем его спин-объектом (хотелось бы назвать спин-вектором, но это название уже закреплено за аксиальным вектором, например в книге Жилина [5].

Мы без доказательства приведем здесь проверенную на компьютере формулу, которая определяет, как изменяются координаты спин-объекта при повороте трехмерного базиса.

$$B = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}e^{i\gamma}\frac{1+\cos\beta}{2} & e^{i\gamma}(-i\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}) & e^{-i\alpha}e^{i\gamma}\frac{1-\cos\beta}{2} \\ e^{i\alpha}(-i\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}) & \cos\beta & e^{-i\alpha}i\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} \\ e^{i\alpha}e^{-i\gamma}\frac{1-\cos\beta}{2} & e^{-i\gamma}i\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & e^{-i\alpha}e^{-i\gamma}\frac{1+\cos\beta}{2} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Уточним наши действия – мы задаем углы Эйлера, задаем координаты вектора. Потом с помощью матрицы А (формула (1)) переходим к другим координатам (в повернутом базисе). Потом из первоначальных координат вектора получаем координаты спин-объекта. С помощью матрицы В (формула (2)) переходим к другим спин-объектным координатам. Потом от них переходим обратно к вектору (к векторным координатам). И эти векторные координаты совпадают с координатами, полученными из первоначальных векторных координат с помощью матрицы А.

Кстати, матрица В напоминает приведенную в книге Давыдова [2] матрицу для функций Вигнера (или обобщенных сферических функций) в случае единичного момента, но совпадение далеко не полное. Тем не менее ясно, что это родственные величины.

Скалярное произведение спин-объектов можно задать так:

$$(CD) = C_0^* D_0 + C_{-1}^* D_{-1} + C_1^* D_1$$

Теперь перейдем к следующему этапу наших рассуждений. Рассмотрим комплексный вектор-столбец из двух величин. Но, несмотря на наличие только двух компонент, имеет смысл предположить, что этот столбец имеет отношение и к трехмерному пространству. Будем считать, что этот столбец задан в определенном трехмерном базисе. При замене же базиса (то-есть при преобразованиях координат) обе компоненты этого столбца будут меняться.

Предположим, что при повороте базиса, параметризованном с помощью углов Эйлера (как и выше), наш столбец преобразуется с помощью двумерной матрицы F:

$$s' = Fs$$

$$F = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2} & e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}$$

Эта матрица походит на матрицу преобразования спинора, приведенную в книге Ландау [3]. Но не полностью (с точностью до местоположения знака минус). Так что данный столбец имеет смысл считать спинором. Из квантовой физики известно, что с помощью спинора представляют нерелятивистскую волновую функцию электрона.

Что же может быть обоснованием вышеприведенной формулы? Попробуем образовать из компонент спинора компоненты спин-объекта по такому закону:

$$D_0 = \frac{S_1 S_1^* - S_2 S_2^*}{2}$$

$$D_{-1} = -i\frac{S_1 S_2^*}{\sqrt{2}}$$

$$D_1 = i\frac{S_2 S_1^*}{\sqrt{2}}$$

Далее действуем так: задаем спинор. Из него образуем спин-объект, потом преобразуем его с помощью вышеприведенной формулы (считая, что базис повернулся). Потом преобразуем первоначальный спинор с помощью матрицы F (и тех же углов Эйлера). После этого повернутый спинор преобразуем в спин-объект. Этот спин-объект должен совпасть с повернутым спин-объектом.

Можно ввести столбец из величин, сопряженных к спинорным компонентам.

$$\begin{pmatrix} S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^* \\ S_2^* \end{pmatrix}$$

Имеет смысл считать, такой столбец преобразуется при поворотах с помощью матрицы, комплексно сопряженной к F:

$$G = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\frac{\gamma}{2}} \cos\frac{\beta}{2} & -e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\frac{\gamma}{2}} \sin\frac{\beta}{2} \\ e^{-i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\gamma}{2}} \sin\frac{\beta}{2} & e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\gamma}{2}} \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Такие объекты в книге Берестецкого, Лифшица и Питаевского [4] названы «пунктирными» спинорами. С их помощью спин-объект можно образовать так:

$$D_0 = \frac{S_1 S_3 - S_2 S_4}{2}$$

$$D_{-1} = -i\frac{S_1 S_4}{\sqrt{2}}$$

$$D_1 = i\frac{S_2 S_3}{\sqrt{2}}$$

Заметим, что в этих формулах нет «звездочек», обозначающих комплексное сопряжение.

И в заключение отметим, что, имея спинор s и спин-объект C, можно задать своеобразное «смешанное» их произведение и получить опять спинор d:

$$d_1 = \frac{s_1 C_0^*}{2} + i\frac{s_2 C_1^*}{\sqrt{2}}$$

$$d_2 = -\frac{s_2 C_0^*}{2} - i\frac{s_1 C_{-1}^*}{\sqrt{2}}$$

Преобразовываться при поворотах все эти величины будут согласованным образом.

Список литературы:

1) Г. Голдстейн «Классическая механика» М. “Наука” 1975.
2) А. С. Давыдов «Квантовая механика» М. “Наука” 1973.
3) Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц «Квантовая механика. Нерелятивистская теория.» М. “Наука” 1989.
4) В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский «Квантовая электродинамика» М. “Наука” 1989.
5) П.А.Жилин «Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве» (электронная копия книги найдена в Интернете)