Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

К проблеме реакции излучения.

В электродинамике выводятся выражения для силы реакции излучения. Самое простое, пригодное для нерелятивистского случая, выглядит так [1]:

$$\vec{F}_R = \frac{2e^2\ddot{\vec{v}}}{3c^3}.$$

Как известно, использование этого выражение наталкивается на определенные сложности. В частности, уравнение движения, включающее подобную силу реакции, содержит самоускоряющиеся решения [5].

Приведем также формулу Лармора для мощности излучения медленно движущегося одиночного заряда [1].

$$P_L = \frac{2e^2}{3c^3}\left|\dot{\vec{v}}(t-\frac{r}{c})\right|^2.$$

Авторы ряда книг не обращают внимания на некоторое противоречие, которое содержится в совокупном применении обеих формул (хотя кое-где его обсуждение найти можно – см. напр. [7]). Если частица движется так, что лишь первая производная скорости ненулевая (а высшие – равны нулю), то, согласно формуле Лармора, имеет место ненулевое излучение мощности. Но сила излучательного торможения (т.е. реакции излучения) равна нулю.

В заключение данного критического вступления отмечу, что сила, зависящая от третьей производной координаты, плохо укладывается в рамки ньютоновского подхода, согласно которому дифференциальные уравнения движения есть уравнения второго порядка.

Попробуем вывести альтернативное выражение для силы реакции излучения. Для этого нам потребуется формула для силы, действующей на заряженную частицу в электромагнитном поле, отличающаяся от лоренцевской.

$$\vec{F} = -\frac{e}{c}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{e}{c}(\vec{v}\,\nabla)\vec{A} + \frac{e}{c}\left[\vec{v}\; rot\vec{A}\right] - e\nabla\varphi. \qquad (1)$$

В качестве поля A нас будет интересовать не внешнее заданное поле, а поле, порожденное самой заряженной частицей.

Нужно ли учитывать первое слагаемое в выражении (1)? Согласно формуле Лармора мощность излучения не зависит от производных скорости выше первой. Можно надеяться, что если для некоторого момента времени мы заменим нашу реальную излучающую частицу на другую, воображаемую, имеющую те же ускорение, координату и скорость, но равные нулю высшие производные скорости, то мощность излучения будет такой же (для этого момента времени). Так как учет первого слагаемого приводит к появлению второй производной скорости в формуле для силы реакции излучения (соответствующие выкладки мы здесь не приводим), мы отбрасываем первое слагаемое, ведь у нашей воображаемой частицы вторая производная скорости равна нулю.

Третье слагаемое мы также не будем учитывать, так как оно отвечает действию на электрон обычной силы Лоренца, которая не изменяет энергию электрона. Действие потенциального поля (четвертое слагаемое) также не учитываем.

Итак, остается только второе слагаемое. Именно его наличие отличает выражение (1) от стандартного (напр. в книге [2]). Обозначим это слагаемое индексом “0”.

$$\vec{F}_0 = \frac{e}{c}(\vec{v}\,\nabla)\vec{A}. \qquad (2)$$

Далее мы будем считать наш электрон не точечным, а размазанным в пространстве образованием. Для читателей, знакомых с книгой Джексона [5], отметим, что мы стараемся (в общих чертах) следовать в русле выкладок, приведенных в этой книге, хотя, конечно, серьезные отличия (главным образом из-за введения силы (2)) неизбежны.

Запишем выражение для силы, с которой электрон действует сам на себя:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = \int \frac{\rho}{c} (\vec{v}\,\nabla)\vec{A}_{self}\, dr^3.$$

Индексом “self” помечено поле векторного потенциала, действующее на отдельную частичку нашего движущегося электрона и созданное всеми остальными его частями. Уточним вид размытия – будем считать наш размытый электрон цилиндром (не шариком, как в [5]), ось которого направлена вдоль предполагаемого действия силы (на данном этапе рассуждений это направление еще неизвестно). Тогда

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = \int \frac{\rho(x)}{c} (\vec{v}\,\nabla)\vec{A}_{self}\, dx = \int \frac{en(x)}{c} (\vec{v}\,\nabla)\vec{A}_{self}\, dx. \qquad (3)$$

Здесь x – это координата вдоль линии действия силы, n(x) – нормированная концентрация заряда электрона. Интеграл величины n по x равен единице.

Как можно записать поле векторного потенциала, которое входит в (3)? Сделаем это так:

$$\vec{A}_{self} = \frac{e}{c}\int \frac{n(\xi)[\vec{v}]_{ret}}{R} d\xi = \frac{e}{c}\int \frac{n(\xi)[\vec{v}]_{ret}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} d\xi.$$

Здесь ξ- одна из составляющих r_0 (вектора координат источника поля). Можно записать:

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi \\ \mu \\ \eta \end{pmatrix},$$

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\mu)^2 + (z-\eta)^2}.$$

Значок “ret” и квадратные скобки означают, что скорость берется в запаздывающий момент времени.

Далее подействуем на это выражение дифференциальным оператором, представляющим из себя скалярное произведение градиента на скорость. Учтем, что скорость тоже берется в запаздывающий момент времени (но это другой запаздывающий момент, ведь частица движется со скоростью v, которая меньше, чем скорость света). Это «конвективное» запаздывание обозначим значком “Vret”.

$$(\vec{v}\,\nabla)\vec{A}_{self} = \frac{e}{c}([\vec{v}]_{Vret}\nabla)\int \frac{n(\xi)[\vec{v}]_{ret}}{R} d\xi = \frac{e}{c}\int ([\vec{v}]_{Vret}\nabla)\frac{n(\xi)[\vec{v}]_{ret}}{R} d\xi.$$

Теперь вынесем числитель дроби за знак пространственного дифференцирования. Основанием для этого служит то, что скорость самой частицы в механике считается функцией только времени, но не координат (если это, конечно, не механика сплошной среды). Несмотря на то, что электрон размазан по некоторой области пространства, скорости всех его частей мы считаем равными скорости исходной точечной частицы. А в числителе соотношения для поля стоит именно скорость самой частицы (ведь мы рассматриваем действие электрона на самого себя).

$$(\vec{v}\,\nabla)\vec{A}_{self} = \frac{e}{c}\int n(\xi)[\vec{v}]_{ret}([\vec{v}]_{Vret}\nabla)\frac{1}{R} d\xi.$$

Производить дифференцирование пока не будем. Вначале воспользуемся малостью размеров размазанного электрона. В книге [5] приведено разложение для запаздывающей величины

$$[...]_{ret}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{R}{c})^n\frac{\partial^n}{\partial t^n}[...].$$

Мы сразу возьмем из этого ряда член, при подстановке которого сократится полюс по R. Учтем также наличие запаздывания по скорости частицы.

$$[...]_{ret}=-\frac{R}{c}\frac{\partial}{\partial t}[...],$$

$$[...]_{Vret}=-\frac{R}{|v|\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial t}[...].$$

Здесь φ - это угол между скоростью и направлением силы. Подставим эти выражения. Далее произведем дифференцирование по направлению (теперь уже не скорости, а ускорения, причем теперь ясно, что линия действия силы совпадает с направлением ускорения).

$$(\vec{v}\,\nabla)\vec{A}_{self}=\frac{e}{c}\int n(\xi)(-\frac{R}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{v})(-\frac{R}{|v|\cos\varphi}(\frac{\partial}{\partial t}\vec{v})\,\nabla)\frac{1}{R}d\xi.$$

Пусть ось X направлена вдоль вектора ускорения. В этом случае

$$(-\frac{R}{|v|\cos\varphi}(\frac{\partial}{\partial t}\vec{v})\,\nabla)=(-\frac{R}{|v|\cos\varphi}(\frac{\partial}{\partial t}v_x)\frac{\partial}{\partial x})\frac{1}{|x-\xi|}.$$

Тогда

$$(\vec{v}\,\nabla)\vec{A}_{self}=-\frac{e}{c}\int n(\xi)(\frac{R}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{v})\frac{R}{|v|\cos\varphi}\left|\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}\right|\frac{1}{R^2}d\xi=$$

$$=-\frac{e}{c}\frac{\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}}{c|v|\cos\varphi}\left|\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}\right|\int n(\xi)d\xi.$$

Все величины R в знаменателе и числителе сократились. Результат получился независимым от размеров размытого электрона. Подставим теперь все это в формулу для силы (3).

$$\vec{F}=\int\frac{en(x)}{c}\{-\frac{e}{c}\frac{\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}}{c|v|\cos\varphi}\left|\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}\right|\int n(\xi)d\xi\}dx=$$

$$=-\frac{e^2}{c^3}\frac{\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}}{|v|\cos\varphi}\left|\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}\right|\int n(x)dx\int n(\xi)d\xi=-\frac{e^2}{c^3}\frac{\left|\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}\right|\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}}{|v|\cos\varphi}.$$

Напомню: φ – угол между ускорением частицы и ее скоростью.

Умножим только что полученный результат на безразмерный коэффициент, равный 2/3. Наличие этого множителя не следует из только что приведенной цепочки выкладок (ни в коей мере не строгих, как мы понимаем – ведь, в частности, на подобных масштабах должны действовать уже не классические, а квантовые законы). Обосновать его введение можно ссылкой на закон сохранения энергии.

Итак, запишем окончательное выражение:

$$\vec{F}_{R2}=-\frac{2e^2}{3c^3}\frac{\left|\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}\right|\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}}{|\vec{v}(t)|\cos\varphi}. \qquad (5)$$

Действие такой силы можно заменить наличием следующей добавки к массе заряженной частицы:

$$\vartriangle m=\frac{2e^2}{3c^3\left|\vec{v}(t)\right|\cos\varphi}\left|\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right|.$$

Если скалярно умножить выражение (5) на скорость, мы получим темп изменения энергии частицы за счет реакции излучения.

$$P=\vec{F}_{R2}\vec{v}=-\frac{2e^2}{3c^3}\frac{\left|\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}\right|(\frac{\partial}{\partial t}\vec{v})}{\left|\vec{v}(t)\right|\cos\varphi}\vec{v}=$$

$$=-\frac{2e^2}{3c^3}\frac{\left|\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}(t)\right|\cos\varphi}\left|\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}\right|\left|\vec{v}(t)\right|\cos\varphi=$$

$$=-\frac{2e^2}{3c^3}\left|\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right|^2.$$

С точностью до сдвига аргумента скорости (и до знака – ведь энергия частицы уменьшается!) эта формула совпадает формулой Лармора, определяющей мощность излучения. Таким образом, закон сохранения энергии выполняется – потери энергии на излучение равны работе силы реакции излучения (по абсолютной величине).

Список литературы:

1) Терлецкий Я.П. «Электродинамика», М. «Высшая школа» 1990
2) Голдстейн Г. «Классическая механика», М. «Наука» 1975 с.32-33
3) Ландау, Лифшиц «Механика», М. «Наука» 1988
4) Ландау, Лифшиц «Теория поля», М. «Наука» 1967
5) Джексон Дж. «Классическая электродинамика», М «Мир» 1965 с.636-638
6) Зоммерфельд А. «Электродинамика», М «Издательство иностранной литературы» 1958
7) Гинзбург В.Л. «Теоретическая физика и астрофизика», М «Наука» 1987