Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

К проблеме реакции излучения.

В электродинамике выводятся выражения для силы реакции излучения. Самое простое, пригодное для нерелятивистского случая, выглядит так [1]:

$$\vec{F}_R = \frac{2e^2\ddot{\vec{v}}}{3c^3}.$$

Как известно, использование этого выражение наталкивается на определенные сложности. В частности, уравнение движения, включающее подобную силу реакции, содержит самоускоряющиеся решения [5].

Приведем также формулу Лармора для мощности излучения медленно движущегося одиночного заряда [1].

$$P_L = \frac{2e^2}{3c^3}\left|\dot{\vec{v}}(t-\frac{r}{c})\right|^2.$$

Почему-то авторы просмотренных мною книг не обращали внимания на некоторое противоречие, которое содержится в совокупном применении обеих формул (хотя, возможно, где-то подобные рассуждения и приведены). Если частица движется так, что лишь первая производная скорости ненулевая (а высшие – равны нулю), то, согласно формуле Лармора, имеет место ненулевое излучение мощности. Но сила излучательного торможения (т.е. реакции излучения) равна нулю.

В заключение данного критического вступления отмечу, что сила, зависящая от третьей производной координаты, плохо укладывается в рамки ньютоновского подхода, согласно которому дифференциальные уравнения движения есть уравнения второго порядка.

Попробуем вывести альтернативное выражение для силы реакции излучения. Для этого нам потребуется формула для силы, действующей на заряженную частицу в электромагнитном поле, отличающаяся от лоренцевской.

$$\vec{F} = -\frac{e}{c}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{e}{c}(\vec{v}\,\nabla)\vec{A} + \frac{e}{c}\left[\vec{v}\; rot\vec{A}\right] - e\nabla\varphi. \qquad (1)$$

В качестве поля A нас будет интересовать не внешнее заданное поле, а поле, порожденное самой заряженной частицей.

Нужно ли учитывать первое слагаемое в выражении (1)? Согласно формуле Лармора мощность излучения не зависит от производных скорости выше первой. Можно надеяться, что если для некоторого момента времени мы заменим нашу реальную излучающую частицу на другую, воображаемую, имеющую те же ускорение, координату и скорость, но равные нулю высшие производные скорости, то мощность излучения будет такой же (для этого момента времени). Так как учет первого слагаемого приводит к появлению второй производной скорости в формуле для силы реакции излучения (соответствующие выкладки мы здесь не приводим), мы отбрасываем первое слагаемое, ведь у нашей воображаемой частицы вторая производная скорости равна нулю.

Третье слагаемое мы также не будем учитывать, так как оно отвечает действию на электрон обычной силы Лоренца, которая не изменяет энергию электрона. Действие потенциального поля (четвертое слагаемое) также не учитываем.

Итак, остается только второе слагаемое. Именно его наличие отличает выражение (1) от стандартного (напр. в книге [2]). Обозначим это слагаемое индексом “0”.

$$\vec{F}_0 = \frac{e}{c}(\vec{v}\,\nabla)\vec{A}. \qquad (2)$$

Поле векторного потенциала, порожденное движущимся со скоростью v(t) электроном, мы будем определять по формуле

$$\vec{A} = \frac{e\vec{v}}{c\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_0\right|}. \qquad (3)$$

Здесь индексом “1” помечен радиус-вектор точки наблюдения поля, а индексом “0” – радиус-вектор точки нахождения электрона.

Далее значком r мы будем обозначать координату, отсчитываемую вдоль скорости электрона.

При подставлении выражения (3) в формулу для силы (2) мы должны учесть, что временной аргумент будет сдвинут в сторону «прошлого» на некоторую величину

$$\Delta t_0 = \frac{r}{c}.$$

В выражение (2) входит не только векторный потенциал, но и скорость частицы. Ее аргумент также будет сдвинут в прошлое, но на другую величину

$$\Delta t_1 = \frac{r}{\left|\vec{v}\right|}.$$

Подставим все это в выражение (2).

$$\vec{F}_0 = \frac{e^2}{c^2}\left|\vec{v}(t-\Delta t_1)\right|\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\vec{v}(t-\Delta t_0)}{r}\right) = -\frac{e^2}{c^2}\left|\vec{v}(t-\Delta t_1)\right|\frac{\vec{v}(t-\Delta t_0)}{r^2} \approx$$

$$\approx -\frac{e^2}{c^2}\left(\left|\vec{v}(t)\right| - \Delta t_1\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}\right)\frac{\vec{v}(t) - \Delta t_0\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}}{r^2} =$$

$$= -\frac{e^2}{c^2}\left|\vec{v}(t)\right|\frac{\vec{v}(t)}{r^2} + \frac{e^2}{c^2}\left|\vec{v}(t)\right|\frac{\Delta t_0\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}}{r^2} + \frac{e^2}{c^2}\Delta t_1\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}\frac{\vec{v}(t)}{r^2} - \frac{e^2}{c^2}\Delta t_1\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}\frac{\Delta t_0\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}}{r^2}.$$

Учтем выражения временных отсчетов (сдвигов) через координату r.

$$\vec{F}_0 = -\frac{e^2}{c^2}\left|\vec{v}(t)\right|\frac{\vec{v}(t)}{r^2} + \frac{e^2}{c^2}\left|\vec{v}(t)\right|\frac{\dfrac{r}{c}\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}}{r^2} +$$

$$+\frac{e^2}{c^2}\frac{r}{\left|\vec{v}(t)\right|}\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}\frac{\vec{v}(t)}{r^2} - \frac{e^2}{c^2}\frac{r}{\left|\vec{v}(t)\right|}\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}\frac{\dfrac{r}{c}\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}}{r^2}.$$

Видно, что лишь четвертое слагаемое остается конечным при стремлении r к нулю. Будем считать, что именно этим членом определяется сила реакции излучения.

$$\vec{F}_{R1} = -\frac{e^2}{c^3\left|\vec{v}(t)\right|}\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}\frac{d\vec{v}(t)}{dt}.$$

Отметим также, что в случае одномерного движения $\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}$ можно заменить на $\left|\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right|$.

В этом месте сделаем небольшое отступление от основного хода повествования. Обратимся к вопросу – как влияет добавка (2) на движение электрона в однородном магнитном поле? Подберем векторный потенциал, соответствующий однородному магнитному полю и запишем его в цилиндрических координатах:

$$\vec{A} = \vec{i}_\varphi \frac{B_0}{2} r.$$

Если произвести численный расчет для такого поля, мы обнаружим, что электрон движется по окружности (как и для случая обычной силы Лоренца). Но радиус этой окружности меньше в полтора раза.

Чтобы сохранить прежние значения констант e и m (заряда и массы электрона), можно считать, что настоящий лагранжиан частицы в электромагнитном поле имеет следующий вид:

$$L = \frac{m\vec{V}^2}{2} + \frac{2e}{3c}\vec{v}\vec{A} - e\varphi. \qquad (4)$$

Напомню, что в общепринятой формуле для такого лагранжиана (см. напр.[2]) множитель 2/3 отсутствует.

Нужно также помнить, что к лагранжиану (4) можно, вообще говоря, добавить члены, ответственные за движение электромагнитного поля. Чтобы уравнения для векторного потенциала остались прежними, члены, куда входит векторный потенциал, также нужно домножить на 2/3.

Сила, действующая на заряд в электромагнитном поле, тогда будет выглядеть так:

$$\vec{F} = -\frac{2e}{3c}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2e}{3c}(\vec{v}\,\nabla)\vec{A} + \frac{2e}{3c}\left[\vec{v}\, rot\vec{A}\right] - e\nabla\varphi.$$

Сила реакции электрона в этом случае также домножается на 2/3. Мы получаем окончательное выражение:

$$\vec{F}_{R2} = -\frac{2e^2}{3c^3\left|\vec{v}(t)\right|}\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}\frac{d\vec{v}(t)}{dt}. \qquad (5)$$

Действие такой силы можно заменить наличием следующей добавки к массе заряженной частицы:

$$\triangle m = \frac{2e^2}{3c^3\left|\vec{v}(t)\right|}\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}.$$

Если скалярно умножить выражение (5) на скорость, мы получим темп изменения энергии частицы за счет реакции излучения.

$$P = \vec{F}_{R2}\vec{v} = -\frac{2e^2}{3c^3\left|\vec{v}(t)\right|}\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\vec{v} =$$

$$= -\frac{2e^2}{3c^3\left|\vec{v}(t)\right|}\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}\left|\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right|\left|\vec{v}(t)\right|\cos\varphi =$$

$$= -\frac{2e^2}{3c^3}\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}\left|\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right|\cos\varphi.$$

Здесь φ – угол между ускорением частицы и ее скоростью. В случае равномерного движения заряженной частицы по окружности этот угол равен π/2, и потери энергии на излучение равны нулю. Следовательно, излучение электромагнитных волн отсутствует.

В том случае, когда движение частицы одномерно, формулу для темпа потери энергии на излучение можно записать так:

$$P_1 = -\frac{2e^2}{3c^3}\left|\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right|^2 .$$

С точностью до сдвига аргумента скорости (и до знака – ведь энергия частицы уменьшается!) эта формула совпадает формулой Лармора, определяющей мощность излучения.

Список литературы:

1) Терлецкий Я.П. «Электродинамика», М. «Высшая школа» 1990
2) Голдстейн Г. «Классическая механика», М. «Наука» 1975 с.32-33
3) Ландау, Лифшиц «Механика», М. «Наука» 1988
4) Ландау, Лифшиц «Теория поля», М. «Наука» 1967
5) Джексон Дж. «Классическая электродинамика», М «Мир» 1965 с.636-638
6) Зоммерфельд А. «Электродинамика», М «Издательство иностранной литературы» 1958