Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Что такое квант света.

В этой работе я попытаюсь прояснить физический смысл деления электромагнитных волн на кванты (в открытом пространстве). Причем процедура вторичного квантования использоваться не будет. Для этого рассмотрим двухуровневую квантовую систему:

$$\psi = C_1(t)e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\psi_1(\vec{r}) + C_2(t)e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\psi_2(\vec{r}) . \qquad (1)$$

Коэффициенты C_i будем для простоты считать действительными (для дальнейшего изложения нам этого хватит).

Подставим выражение (1) в уравнение Шредингера, где гамильтониан имеет вид суммы основной части и небольшой возмущающей добавки, причем возмущение обусловлено действием на систему электромагнитного векторного потенциала.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}_0\psi + \frac{i\hbar e}{2mc}(\vec{A}\nabla + \nabla\vec{A})\psi . \qquad (2)$$

В качестве основной части гамильтониана может выступать, например, такой оператор

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{r},$$

хотя это непринципиально (основной оператор может быть и другим).

Пользуясь соотношением

$$\vec{A}\nabla + \nabla\vec{A} = 2\vec{A}\nabla + div\vec{A},$$

возмущенное уравнение Шредингера можно записать так:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}_0\psi + \frac{i\hbar e}{mc}(\vec{A}\nabla)\psi + \frac{i\hbar e}{2mc}(div\vec{A})\psi . \qquad (3)$$

Уточню – в последней формуле дивергенция действует лишь на вектор-потенциал, но не на волновую функцию (так что значок волновой функции можно было бы записать и слева от дивергенции).

Подставим выражение (1) в уравнение Шредингера (3). Получим

$$\frac{dC_1}{dt}e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\psi_1(\vec{r}) + \frac{dC_2}{dt}e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\psi_2(\vec{r}) =$$
$$= \frac{e}{mc}e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}C_1(\vec{A}\nabla)\psi_1 + \frac{e}{mc}e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}C_2(\vec{A}\nabla)\psi_2 +$$
$$+ \frac{e}{2mc}e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}C_1\psi_1 div\vec{A} + \frac{e}{2mc}e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}C_2\psi_2 div\vec{A}.$$

Далее умножим полученное выражение на функцию

$$e^{i\frac{E_1}{\hbar}t}\psi^*{}_1(\vec{r})$$

и проинтегрируем результат по всему пространству. В результате получим:

$$\frac{dC_1}{dt}=\frac{e}{mc}C_1\int\psi^*{}_1(\vec{A}\nabla)\psi_1dv+\frac{e}{mc}C_2e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t}\int\psi^*{}_1(\vec{A}\nabla)\psi_2dv+$$

$$+\frac{e}{2mc}C_1\int\psi^*{}_1\psi_1div\vec{A}dv+\frac{e}{2mc}C_2e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t}\int\psi^*{}_1\psi_2div\vec{A}dv.$$

Произведя такое же действие с умножением на функцию

$$e^{i\frac{E_2}{\hbar}t}\psi^*{}_2(\vec{r}),$$

мы получим

$$\frac{dC_2}{dt}=\frac{e}{mc}C_1e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}\int\psi^*{}_2(\vec{A}\nabla)\psi_1dv+\frac{e}{mc}C_2\int\psi^*{}_2(\vec{A}\nabla)\psi_2dv+$$

$$+\frac{e}{2mc}C_1e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}\int\psi^*{}_2\psi_1div\vec{A}dv+\frac{e}{2mc}C_2\int\psi^*{}_2\psi_2div\vec{A}dv.$$

Эти два уравнения для двух неизвестных функций C_1 и C_2 можно записать в виде системы

$$\begin{cases}\frac{dC_1}{dt}=\frac{e}{mc}C_1\int\psi^*{}_1(\vec{A}\nabla)\psi_1dv+\frac{e}{mc}C_2e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t}\int\psi^*{}_1(\vec{A}\nabla)\psi_2dv+\\ \qquad+\frac{e}{2mc}C_1\int\psi^*{}_1\psi_1div\vec{A}dv+\frac{e}{2mc}C_2e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t}\int\psi^*{}_1\psi_2div\vec{A}dv,\\ \frac{dC_2}{dt}=\frac{e}{mc}C_1e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}\int\psi^*{}_2(\vec{A}\nabla)\psi_1dv+\frac{e}{mc}C_2\int\psi^*{}_2(\vec{A}\nabla)\psi_2dv+\\ \qquad+\frac{e}{2mc}C_1e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}\int\psi^*{}_2\psi_1div\vec{A}dv+\frac{e}{2mc}C_2\int\psi^*{}_2\psi_2div\vec{A}dv.\end{cases}\qquad(4)$$

Далее мы будем исследовать с помощью этих уравнений эффект спонтанного излучения. Это известная задача (см. например [4]). Обычно при ее решении прибегают к вторичному квантованию электромагнитного поля (векторный потенциал которого входит в уравнения). При этом поле считается заданным (и независимым от коэффициентов С, определяющих состояние квантовой системы). Далее поле квантуется (с помощью аксиоматически вводимой формальной процедуры). Но мы вспомним, что спонтанное излучение можно рассматривать как квантовый аналог реакции излучения. В классической теории сила реакции излучения выражается через характеристики движения самой частицы. Попробуем и мы поступить таким же образом. Наша система описывается коэффициентами C_i. И нашей задачей будет записать уравнения лишь для этих коэффициентов (исключив векторный потенциал). К чему сводится действие спонтанного излучения? К тому, что коэффициент C_2, соответствующий большей энергии, уменьшается до нуля. C_1 же, напротив, растет.

Попробуем описать эволюцию квантовой системы, предоставленной самой себе (то-есть при отсутствии внешнего поля) такими простейшими уравнениями:

$$\begin{cases}\frac{dC_1}{dt}=gC_1,\\ \frac{dC_2}{dt}=-gC_2.\end{cases}\qquad(5)$$

Учет спонтанного излучения с помощью затухания (как во 2-м уравнении системы (5)) - не новая идея. О «феноменологическом учете затухания», можно прочитать, например, в книге [1 с116].

Амплитуда состояния с большей энергией будет экспоненциально затухать, амплитуда же состояния с низшей энергией – наоборот экспоненциально возрастать (что-то вроде отрицательного трения). Решения такие:

$$C_1 = B_1 e^{gt},$$

$$C_2 = B_2 e^{-gt}.$$

B_1 и B_2 здесь – произвольные константы.

Поведение второго решения (затухающего) вполне правдоподобно. Поведение первого же правдоподобно лишь на начальном этапе эволюции (когда абсолютная величина решения еще много меньше единицы). Дальше идет бесконечное возрастание, которое совершенно не согласуется с условием нормировки

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1.$$

Можно ли как-то подправить уравнения? Можно. Для этого нужно ввести зависимость коэффициента g от амплитуд.

Попробуем такие уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma C_2{}^2 C_1, \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma C_1{}^2 C_2. \end{cases} \qquad (6)$$

Выясним, имеет ли эта система какую-нибудь сохраняющуюся величину. Умножим 1-е уравнение на C_1, а второе – на C_2.

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma C_2{}^2 C_1 C_1, \\ C_2 \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma C_1{}^2 C_2 C_2. \end{cases}$$

Сложим уравнения:

$$C_1 \frac{dC_1}{dt} + C_2 \frac{dC_2}{dt} = \gamma (C_2{}^2) C_1 C_1 - \gamma (C_1{}^2) C_2 C_2 = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (C_1{}^2 + C_2{}^2) = 0.$$

Получаем:

$$C_1{}^2 + C_2{}^2 = const = N. \qquad (7)$$

Согласитесь, весьма напоминает условие нормировки. Константу N естественно считать равной единице.

$$C_1{}^2 + C_2{}^2 = 1. \qquad (8)$$

Конечно, неплохо было бы, если бы ее равенство единице вытекало из какого-либо уравнения, но мы пока установим это равенство «волевым» решением.

С учетом всего этого систему (6) можно записать так:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma (1 - C_1{}^2) C_1, \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma (1 - C_2{}^2) C_2. \end{cases} \qquad (9)$$

Решение первого уравнения:

$$C_1 = \frac{\sqrt{B}e^{\gamma t}}{\sqrt{1+Be^{2\gamma t}}}. \qquad (10)$$

Здесь B – произвольная константа. При стремлении t к плюс-бесконечности выражение для C_1 асимптотически приближается к единице (или к (-1), ведь квадратный корень – двузначная функция) .

Решение второго уравнения (получим его, используя условие нормировки (8)):

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{1+Be^{2\gamma t}}} = \frac{1}{\sqrt{B}}\frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{1+\frac{1}{B}e^{-2\gamma t}}}. \qquad (11)$$

Это решение при стремлении t к плюс-бесконечности стремится к нулю.

Запишем выражение для произведения C_1 и C_2:

$$C_1C_2 = \frac{\sqrt{B}e^{\gamma t}}{\sqrt{1+Be^{2\gamma t}}}\frac{1}{\sqrt{1+Be^{2\gamma t}}} = \frac{\sqrt{B}e^{\gamma t}}{1+Be^{2\gamma t}}. \qquad (12)$$

Это выражение приближается к нулю при стремлении времени (t) и в плюс-бесконечность, и в минус-бесконечность.

Отметим здесь также, что в случае использования комплексных коэффициентов C их квадраты в уравнениях были бы заменены на квадраты модулей($C_i^2 \to C_iC_i^* = |C_i|^2$).

Можно ли как-нибудь обосновать уравнения (6) для амплитуд уровней? Вернемся к системе (4) .

Запишем второе уравнение из этой системы (для C_2 – амплитуды уровня с большей энергией). Оставим только первое слагаемое из его правой части. Почему? Второе и четвертое являются быстроосциллирующими при гармонической зависимости векторного потенциала от времени (и пропадут при усреднении по времени). Третье будет близко к нулю в случае малой величины размеров атома по сравнению с длиной волны векторного потенциала.

$$\frac{dC_2}{dt} = \frac{e}{mc}C_1e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}\int \psi^*{}_2(\vec{A}\nabla)\psi_1 dv. \qquad (13)$$

Теперь учтем, что векторный потенциал можно считать зависимым от волновой функции. Он выражается через волновое уравнение:

$$\triangle\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\ .$$

Его общее решение:

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int\frac{\left[\vec{j}\right]_{ret}}{R}dv_0 = \frac{1}{c}\int\frac{\vec{j}(t',\vec{r})}{R}dv_0. \qquad (14)$$

$$t' = t - \frac{R}{c},$$

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2-(z-z_0)^2}.$$

Значок «ret» обозначает запаздывающее решение (аргумент t у соответствующей функции заменяется на t-R/c).

Возникает важный вопрос – что нам считать током в квантовомеханическом случае?

Учтем лишь дипольный характер излучающей системы.

Если мы находимся в «микромире», то-есть рассматриваем излучающий атом вблизи, то примем такое выражение:

$$\vec{j} = e\frac{d}{dt}(\psi^*(t,\vec{r})\vec{r}\psi(t,\vec{r})) = e\vec{r}\,\frac{d}{dt}(\psi^*(t,\vec{r})\psi(t,\vec{r})). \qquad (15)$$

Если подставить в эту формулу значение волновой функции в виде суммы ряда (или конечной суммы, например - два слагаемых для двухуровневой системы), то получим ток в виде такой суммы матричных составляющих:

$$\vec{j} = \sum_{i,j} \vec{j}_{ij}.$$

$$\vec{j}_{ij} = e\psi_i^*(\vec{r})\vec{r}\psi_j(\vec{r})\frac{d}{dt}(C_i e^{i\frac{E_i}{\hbar}t} C_j e^{-i\frac{E_j}{\hbar}t}). \qquad (16)$$

Если же мы находимся в «макромире», то из-за малости размеров атомной излучающей системы пространственное распределение тока можно считать дельта-функцией, сосредоточенной в месте расположения атома.

$$\vec{j} = e\delta(r - r_0)\frac{d}{dt}\int \psi^*(t,\vec{r})\vec{r}\psi(t,\vec{r})dv. \qquad (17)$$

Заметим, что интегрирование в этой формуле равносильно квантовому усреднению.

Выражение для компоненты тока в этом случае следующее:

$$\vec{j}_{ij} = e\delta(r - r_0)\vec{r}_{ij}\frac{d}{dt}(C_i e^{i\frac{E_i}{\hbar}t} C_j e^{-i\frac{E_j}{\hbar}t}). \qquad (18)$$

$$\vec{r}_{ij} = \int \psi_i^*(\vec{r})\vec{r}\psi_j(\vec{r})dv.$$

В случае медленной зависимости коэффициентов C от времени их производными можно пренебречь. И тогда

$$\vec{j}_{ij} = e\delta(r - r_0)\vec{r}_{ij}C_i(t)C_j(t)\frac{i(E_i - E_j)}{\hbar}e^{i\frac{E_i - E_j}{\hbar}t} = e\delta(r - r_0)\vec{r}_{ij}C_i(t)C_j(t)iw_{ij}e^{iw_{ij}t}. \qquad (19)$$

Выяснив смысл тока, вернемся к выражению для векторного потенциала (14), куда этот ток входит в виде функции с запаздывающим аргументом. Следуя [2], запишем разложение в ряд функции от запаздывающего аргумента:

$$[...]_{ret} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{R}{c})^n\frac{\partial^n}{\partial t^n}[...]. \qquad (20)$$

Нас интересует получение как можно более универсального соотношения, не зависящего от подробностей конкретного распределения тока или заряда. Учет нулевого члена данного ряда приведет к рассмотрению внутреннего «устройства» электрона, мы же будем интересоваться «общим» движением системы, на характер которого, как мы надеемся, внутреннее строение системы не должно влиять. Поэтому мы оставим лишь член с первой производной, при подстановке которого сократится полюс по R:

$$[...]_{ret} = -\frac{R}{c}\frac{\partial}{\partial t}[...].$$

Тогда

$$\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\int\frac{\partial\vec{j}(t,\vec{r})}{\partial t}dv_0. \qquad (21)$$

С учетом этого

$$\frac{dC_2}{dt} = -\frac{ke}{mc^3}C_1 e^{i\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t}\int \psi^*{}_2((\int\frac{\partial\vec{j}(t,\vec{r})}{\partial t}dv_0)\nabla)\psi_1 dv. \qquad (22)$$

Здесь в качестве множителя к выражению для векторного потенциала добавлен множитель k (равный 2/3). Можно считать, что он учитывает ослабление поля за счет действия поляризационных зарядов.

Будем считать, что

$$\vec{j} = \vec{j}_{12} = e\psi_1^*(\vec{r})\vec{r}\psi_2(\vec{r})\frac{d}{dt}(C_1 e^{i\frac{E_1}{\hbar}t} C_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}). \qquad (23)$$

То-есть мы взяли лишь одну компоненту для матрицы тока, соответствующую переходу 1-2 (снизу вверх). Почему? Выпишем выражение для усредненного в квантовом смысле радиус-вектора (именно это выражение будет в итоге вычислено после интегрирования тока по пространству):

$$\langle \vec{r} \rangle = \int \psi^*(t)\vec{r}\psi(t)dv_0 = \int (C_1 e^{i\frac{E_1}{\hbar}t}\psi_1^* + C_2 e^{i\frac{E_2}{\hbar}t}\psi_2^*)\vec{r}(C_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\psi_1 + C_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\psi_2)dv_0 =$$

$$= C_1C_2 e^{i(\frac{E_1-E_2}{\hbar})t}\int \psi_1^*\vec{r}\psi_2 dv_0 + C_2C_1 e^{i(\frac{E_2-E_1}{\hbar})t}\int \psi_2^*\vec{r}\psi_1 dv_0 +$$

$$+ C_1^2\int \psi_1^*\vec{r}\psi_1 dv_0 + C_2^2\int \psi_2^*\vec{r}\psi_2 dv_0.$$

Видно - только первое слагаемое при умножении на экспоненту

$$e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} = e^{iw_{21}t}$$

(присутствующую в правой части уравнения (22)) дает неосциллирующее по времени выражение, так как показатели мнимых экспонент сокращают друг друга.

Вернемся к выражению для тока (23). Будем считать, что коэффициенты С изменяются во времени плавно. Тогда

$$\vec{j} = e\psi_1^*(\vec{r})\vec{r}\psi_2(\vec{r})C_1C_2\frac{d}{dt}(e^{i\frac{E_1}{\hbar}t}e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}) = e\psi_1^*(\vec{r})\vec{r}\psi_2(\vec{r})C_1C_2 iw_{12}e^{iw_{12}t}. \qquad (24)$$

Подставим выражение для тока (24) в уравнение (22):

$$\frac{dC_2}{dt} = -\frac{ke^2}{mc^3}C_1 e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}\int \psi^*{}_2((\int \frac{d(e\psi_1^*(\vec{r})\vec{r}\psi_2(\vec{r})C_1C_2 iw_{12}e^{iw_{12}t})}{dt}dv_0)\nabla)\psi_1 dv. \qquad (25)$$

Опять используем плавность изменения С:

$$\frac{dC_2}{dt} = -\frac{ke}{mc^3}C_1 e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}\int \psi^*{}_2((\int e\psi_1^*(\vec{r})\vec{r}\psi_2(\vec{r})C_1C_2(-w_{12}{}^2)e^{iw_{12}t}dv_0)\nabla)\psi_1 dv =$$

$$= \frac{ke^2}{mc^3}C_1 e^{iw_{21}t}e^{iw_{12}t}C_1C_2 w_{12}{}^2\int \psi^*{}_2((\int \psi_1^*(\vec{r})\vec{r}\psi_2(\vec{r})dv_0)\nabla)\psi_1 dv =$$

$$= \frac{ke^2}{mc^3}C_1 e^{iw_{21}t}e^{iw_{12}t}C_1C_2 w_{12}{}^2\int \psi^*{}_2(\vec{r}_{12}\nabla)\psi_1 dv =$$

$$= C_2\frac{ke^2}{mc^3}C_1{}^2 e^{iw_{21}t}e^{iw_{12}t}w_{12}{}^2\vec{r}_{12}\int \psi^*{}_2\nabla\,\psi_1 dv.$$

Оператор градиента мы выразим через оператор импульса:

$$\nabla = -\frac{\hat{\vec{p}}}{i\hbar}.$$

Оператор же импульса можно выразить через оператор координаты, используя классическое выражение его через скорость:

$$\nabla = i\frac{\hat{\vec{p}}}{\hbar} = \frac{im}{\hbar}\frac{d\hat{\vec{r}}}{dt}. \qquad (26)$$

Повторюсь - используя для тока и матричного элемента градиента вышеприведенные значения, мы фактически считаем, что излучение имеет дипольный характер. Но на данном этапе ограничимся этим.

С учетом выражения (26) получим:

$$\frac{dC_2}{dt}=\frac{ke^2}{mc^3}C_1{}^2C_2w_{12}{}^2\vec{r}_{12}\int\psi^*{}_2(\frac{im}{\hbar}\frac{d\widehat{\vec{r}}}{dt})\psi_1 dv=$$
$$=\frac{ke^2}{mc^3}\frac{im}{\hbar}C_1{}^2C_2w_{12}{}^2\vec{r}_{12}iw_{21}\vec{r}_{21}= \qquad (27)$$
$$=-\frac{ke^2}{mc^3}\frac{m}{\hbar}C_1{}^2C_2(w_{21}{}^2)w_{21}(\vec{r}_{21}\vec{r}_{12})=-\frac{ke^2}{c^3\hbar}C_1{}^2C_2w_{21}{}^3\left|\vec{r}_{21}\right|^2.$$

Фактически мы получили 2-е уравнение системы (6). С учетом значения коэффициента k=2/3 мы имеем коэффициент Эйнштейна, деленный на 2.

$$\gamma=\frac{ke^2}{c^3\hbar}w_{21}{}^3\left|\vec{r}_{21}\right|^2=\frac{2e^2}{3c^3\hbar}w_{21}{}^3\left|\vec{r}_{21}\right|^2. \qquad (28)$$

Если C_1 при стремлении времени в плюс-бесконечность изменяется по экспоненте, то его квадрат, соответствующий вероятности нахождения частицы в этом состоянии, будет изменяться по затухающей экспоненте с показателем 2γ, равным коэффициенту Эйнштейна [4].

Для первого уравнения системы (6) мы будем иметь аналогичное (27) выражение, но в него войдет частота

w_{12},

имеющая противоположный знак. Это соответствует возрастающему решению.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.

Можно получить аналогичные уравнения для 3-х уровневой системы в отсутствие внешнего воздействия.

$$\begin{cases}\dfrac{dC_1}{dt}=\gamma_{12}(C_2{}^2)C_1+\gamma_{13}(C_3{}^2)C_1,\\ \dfrac{dC_2}{dt}=\gamma_{21}(C_1{}^2)C_2+\gamma_{23}(C_3{}^2)C_2,\\ \dfrac{dC_3}{dt}=\gamma_{31}(C_1{}^2)C_3+\gamma_{32}(C_2{}^2)C_3.\end{cases}$$

Выражение для γ_{ij} будет таким:

$$\gamma_{ij}=\frac{2e^2}{3c^3\hbar}w_{ij}{}^3\left|\vec{r}_{ij}\right|^2.$$

Умножая уравнения системы на C_1,C_2,C_3 и складывая, получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(C_1{}^2+C_2{}^2+C_3{}^2)=(\gamma_{12}-\gamma_{21})C_2{}^2C_1{}^2+(\gamma_{13}-\gamma_{31})C_3{}^2C_1{}^2+(\gamma_{32}-\gamma_{23})C_2{}^2C_3{}^2.$$

С учетом формулы для коэффициентов γ_{ij} получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(C_1{}^2+C_2{}^2+C_3{}^2)=0.$$

Для N-уровневой системы получатся следующие уравнения:

$$\frac{dC_i}{dt}=\sum_j\gamma_{ij}(C_j{}^2)C_i.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.

Можно и в самом общем виде записать уравнение Шредингера с векторным потенциалом, выраженным через ток.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\widehat{H}_0\psi+\frac{i\hbar ke}{mc}((\frac{1}{c}\int\frac{\left[\vec{j}\right]_{ret}}{R}dv_0)\nabla)\psi+\frac{i\hbar ke}{2mc}(\frac{1}{c}div\int\frac{\left[\vec{j}\right]_{ret}}{R}dv_0)\psi=$$

$$=\widehat{H}_0\psi+\frac{i\hbar ke^2}{mc^2}((\int\frac{\left[\frac{d}{dt}(\psi^*\vec{r}\psi)\right]_{ret}}{R}dv_0)\nabla)\psi+\frac{i\hbar ke^2}{2mc^2}(div\int\frac{\left[\frac{d}{dt}(\psi^*\vec{r}\psi)\right]_{ret}}{R}dv_0)\psi. \quad (29)$$

Мы видим достаточно сложно выглядящее нелинейное интегро-дифференциальное уравнение. Фактически именно его мы и решали, имея дело лишь с двумя уровнями. Уточним также, что в токе, стоящем под знаком интеграла, нужно, вообще говоря, учесть и ток смещения, создаваемый полем поляризационных зарядов.

Приступим теперь к последнему пункту. Попробуем вычислить полную энергию, которая излучается при переходе системы с верхнего уровня на нижний. Количество излученной энергии в единицу времени (фактически скорость изменения энергии) дается формулой Лармора:

$$P_L=\frac{2e^2}{3c^3}\left|\frac{d}{dt}\vec{v}(t-\frac{r}{c})\right|^2. \quad (30)$$

Выразим скорость потерь через ток:

$$P_L=\frac{2}{3c^3}\left|\frac{d}{dt}\vec{j}(t-\frac{r}{c})\right|^2.$$

Теперь учтем, что для двухуровневой системы ток равен

$$\vec{j}=e\vec{r}\frac{d}{dt}(\psi^*(t,\vec{r})\psi(t,\vec{r}))=$$

$$=e\vec{r}\frac{d}{dt}((C_1(t)e^{i\frac{E_1}{\hbar}t}\psi_1^*(\vec{r})+C_2(t)e^{i\frac{E_2}{\hbar}t}\psi_2^*(\vec{r}))(C_1(t)e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\psi_1(\vec{r})+C_2(t)e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\psi_2(\vec{r})))=$$

$$=\frac{d}{dt}e\vec{r}C_1^2\psi_1^*(\vec{r})\psi_1(\vec{r})+\frac{d}{dt}e\vec{r}C_1C_2e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t}\psi_1^*(\vec{r})\psi_2(\vec{r})+\frac{d}{dt}e\vec{r}C_2C_1e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}\psi_2^*(\vec{r})\psi_1(\vec{r})+$$

$$+\frac{d}{dt}e\vec{r}C_2^2\psi_2^*(\vec{r})\psi_2(\vec{r})=$$

$$=\frac{d}{dt}e\vec{r}C_1C_2e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t}\psi_1^*(\vec{r})\psi_2(\vec{r})+\frac{d}{dt}e\vec{r}C_2C_1e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}\psi_2^*(\vec{r})\psi_1(\vec{r}).$$

Первое и четвертое слагаемые почти постоянны (зависят от времени лишь за счет коэффициентов C), поэтому мы считаем, что при их дифференцировании получится ноль.

Перед тем, как подставлять в формулу Лармора, произведем квантовое усреднение тока.

$$\left\langle\vec{j}\right\rangle=\frac{d}{dt}C_1C_2e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t}e\int\vec{r}\psi_1^*(\vec{r})\psi_2(\vec{r})dv+\frac{d}{dt}C_2C_1e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}e\int\vec{r}\psi_2^*(\vec{r})\psi_1(\vec{r})dv=$$

$$=\frac{d}{dt}C_1C_2e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t}e\vec{r}_{12}+\frac{d}{dt}C_2C_1e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}e\vec{r}_{21}.$$

Если коэффициенты C изменяются по времени плавно, то

$$\left\langle\vec{j}\right\rangle=C_1C_2i\frac{E_1-E_2}{\hbar}e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t}e\vec{r}_{12}+C_2C_1i\frac{E_2-E_1}{\hbar}e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}e\vec{r}_{21}=$$

$$=C_1C_2iw_{12}e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t}e\vec{r}_{12}+C_2C_1iw_{21}e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}e\vec{r}_{21}.$$

Уже это значение подставим в формулу Лармора.

$$P_L = \frac{2}{3c^3}\left|\frac{d}{dt}(C_1C_2 i w_{12} e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t} e\vec{r}_{12} + C_2C_1 i w_{21} e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} e\vec{r}_{21})\right|^2 .$$

В случае плавного изменения С:

$$P_L = \frac{2e^2}{3c^3}\left|C_1C_2 i \frac{d}{dt}(w_{12} e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t} \vec{r}_{12} + w_{21} e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} \vec{r}_{21})\right|^2 =$$

$$= \frac{2e^2}{3c^3}\left|C_1C_2 i(i w_{12}{}^2 e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t} \vec{r}_{12} + i w_{21}{}^2 e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} \vec{r}_{21})\right|^2 =$$

$$= \frac{2e^2}{3c^3}\left|C_1C_2\right|^2 \left|-(w_{12}{}^2 e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t} + w_{21}{}^2 e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t})\vec{r}_{12}\right|^2 =$$

$$= \frac{2e^2}{3c^3}\left|C_1C_2\right|^2 \left|\vec{r}_{12}\right|^2 (w_{12}{}^2 e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t} + w_{21}{}^2 e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t})^* (w_{12}{}^2 e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t} + w_{21}{}^2 e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}) =$$

$$= \frac{2e^2}{3c^3}\left|C_1C_2\right|^2 \left|\vec{r}_{12}\right|^2 (w_{12}{}^2 w_{12}{}^2 + w_{21}{}^2 w_{12}{}^2 e^{2i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t} + w_{12}{}^2 w_{21}{}^2 e^{2i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} + w_{21}{}^2 w_{21}{}^2) =$$

$$= \frac{2e^2}{3c^3}\left|C_1C_2\right|^2 \left|\vec{r}_{12}\right|^2 (2w_{12}{}^4 + w_{12}{}^4 e^{2i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t} + w_{12}{}^4 e^{2i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}).$$

Если произвести еще и усреднение по времени, останется лишь первое неосциллирующее слагаемое. В итоге получим:

$$P_L = \frac{4e^2}{3c^3}\left|C_1C_2\right|^2 \left|\vec{r}_{12}\right|^2 w_{21}{}^4. \qquad (31)$$

Теперь умножим и числитель, и знаменатель на постоянную Планка.

$$P_L = w_{21}\frac{\hbar 4e^2}{3c^3\hbar}\left|\vec{r}_{12}\right|^2 w_{21}{}^3 \left|C_1C_2\right|^2 = 2\gamma\hbar w_{21}\left|C_1C_2\right|^2 . \qquad (32)$$

Вспомним, что коэффициенты С являются функциями от t:

$$\left|C_1C_2\right|^2 = \frac{Be^{2\gamma t}}{(1+Be^{2\gamma t})^2}. \qquad (33)$$

Здесь γ определяется выражением (28). Нам остается проинтегрировать выражение (33) по времени, чтоб получить энергию, излученную за все время перехода из верхнего состояния в нижнее.

$$E = 2\gamma\hbar w_{12}\int_{-\infty}^{\infty}\left|C_1C_2\right|^2 dt = 2\gamma\hbar w_{12}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Be^{2\gamma t}}{(1+Be^{2\gamma t})^2}dt.$$

Этот интеграл после преобразования можно свести к табличному [5 с319, 6 с120,121]. Он равен

$$\frac{1}{2\gamma}$$

Получается, что излученная при переходе энергия равна

$$E = \hbar w_{21}.$$

Вывод: без применения вторичного квантования мы получили излучение кванта энергии. Это позволяет предположить, что при взаимодействии атомной системы с открытым пространством электромагнитное поле в окружающей атомный источник области имеет непрерывный характер. Квантованность же появляется из-за того, что атомные источники представляют собой микроантенны, колебания в которых из-за квантовых переходов плавно промодулированы функцией времени, спадающей в плюс-минус бесконечности. И сам квант света представляет из себя квазигармонический пакет (цуг) электромагнитного излучения, порожденный таким источником.

Список литературы:

1) Лоудон Р. «Квантовая теория света», М. «Мир» 1976
2) Джексон Дж. «Классическая электродинамика», М «Мир» 1965 с.636-638
3) Зоммерфельд А. «Электродинамика», М «Издательство иностранной литературы» 1958
4) Соколов А.А., Лоскутов Ю.М., Тернов И.М. «Квантовая механика», М. «Просвещение» 1965
5) Градштейн И.С., Рыжик И.М. «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений», М. ГИФМЛ 1963
6) «Tables of integral transforms» v1, McGrow-Hill book Company, Inc, 1954