Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Электромагнитные волны в одиночном цилиндрическом проводнике (наброски и размышления).

Задача об электромагнитном поле в цилиндрическом проводнике и в окружающем его пространстве обычно излагается в литературе несколько фрагментарно. Либо рассматриваются высокочастотные волны в однопроводной линии, либо низкочастотные или постоянные поля в проводе (немалое место, например, уделено этому вопросу в книге Зоммерфельда [7]). Отдельно разбираются задачи, связанные с излучением электромагнитных волн антеннами.

Цилиндрический проводник является вторым по простоте после полуплоскости «полигоном» для исследования скин-эффекта. Часто полагают, что ток в такой системе гармонически зависит от времени, но не зависит от продольной координаты (хотя, например, Вайнштейн уделил несколько слов и рассмотрению зависимости от пространственной координаты z [1]). Поля вычисляют лишь во внутренней области (то-есть внутри проводника). Трудно представить, что ни у кого из ученых не возникло достаточного любопытства, чтоб рассмотреть поля снаружи. Может их что-то останавливало? Впрочем, я не претендую на полный охват информации. Если кто-то мне укажет на источник с соответствующими решениями (а еще лучше – пришлет отсканированный файл по электронной почте), я буду благодарен.

Отрезок цилиндрического проводника, как известно, представляет собой антенну. Существование излучающих волн тока в такой системе является экспериментальным фактом и широко используется. Но поля в такой системе пытаются описывать с помощью сложных интегральных уравнений. Как указано в одной из книг Л.А.Вайнштейна [1], строгое электродинамическое решение задачи о волнах в антеннах сталкивается со значительными математическими трудностями. Рассмотрение же их с использованием теории длинных линий, как упомянуто там же, нельзя обосновать ни с физической, ни с математической точки зрения, хотя такой подход и применяется.

На этом мы закончим с введением и попробуем пойти простым путем - взять какое-либо готовое решение для скин-слоя и распространить поля на внешнюю область.

ЧАСТЬ 1. Решение задачи о скин-слое в цилиндрическом проводе с током, зависящим от времени (но не от координаты z), хорошо изложено в книге Тихонова и Самарского [6]. Электрическое поле внутри провода предполагается продольным, магнитное поле – имеющим лишь φ-компоненту (в цилиндрической системе координат). Попробуем воспользоваться этими результатами, чтоб описать поля снаружи проводника. Нужно только помнить, что в этой книге используется временная зависимость в виде мнимой экспоненты, где циклическая частота имеет знак «плюс»

$$e^{iwt},$$

в отличие, скажем, от книг [1,2].

Для продольной компоненты электрического поля внутри проводника возьмем выражение, вычисленное в [6] -

$$E_z = \frac{\sqrt{-i}I(t)\sqrt{w\mu}}{ac\sqrt{\pi\sigma}J_1\left(\alpha\sqrt{-i}a\right)}J_0\left(\alpha\sqrt{-i}r\right), \quad \alpha = \frac{2}{c}\sqrt{\pi w\mu\sigma} \qquad (1)$$

Если полный ток *I* не зависит от времени, то скин-эффект отсутствует, и плотность тока должна быть одинакова по всему сечению провода. Тогда

$$E_z = \frac{j_z}{\sigma} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \qquad (2)$$

Это поле можно легко выразить через скалярный потенциал

$$\varphi = -\frac{I}{\pi a^2 \sigma} z$$

Предположим, что для случая переменного тока эта формула также применима (ведь к цепям переменного тока применимо понятие напряжения). Следующий шаг: к электрическому полю (1) прибавим и вычтем поле (2), посчитав ток в нем зависящим от *t*.

$$E_z = \left(\frac{\sqrt{-i}I(t)\sqrt{w\mu}}{ac\sqrt{\pi\sigma}J_1\left(\alpha\sqrt{-i}a\right)} J_0\left(\alpha\sqrt{-i}r\right) - \frac{I(t)}{\pi a^2\sigma}\right) + \frac{I(t)}{\pi a^2\sigma}$$

Скин-эффект появляется благодаря электромагнитной индукции [9], это дает основание выразить разностное поле

$$E_{z1} = \frac{\sqrt{-i}I(t)\sqrt{w\mu}}{ac\sqrt{\pi\sigma}J_1\left(\alpha\sqrt{-i}a\right)} J_0\left(\alpha\sqrt{-i}r\right) - \frac{I(t)}{\pi a^2\sigma}$$

через векторный потенциал.

$$\vec{A} = \vec{k}\frac{ic}{w} I(t)\left(\frac{\sqrt{-i}\sqrt{w\mu}}{ac\sqrt{\pi\sigma}J_1\left(\alpha\sqrt{-i}a\right)} J_0\left(\alpha\sqrt{-i}r\right) - \frac{1}{\pi a^2\sigma}\right)$$

Индукция магнитного поля выражается так:

$$B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\vec{k}\frac{2\mu}{ca} I(t)\frac{J_1\left(\alpha\sqrt{-i}r\right)}{J_1\left(\alpha\sqrt{-i}a\right)}$$

Попытаемся теперь подобрать поля снаружи проводника. Поле скалярного потенциала попробуем взять в таком виде (как решение статической задачи о поле заряженного цилиндра):

$$\varphi = -F\ln r$$

Приравняем потенциалы при *r*=*a*, чтоб определить F.

$$-F\ln a = -\frac{zI}{\pi a^2\sigma}$$

$$F = \frac{zI}{\pi a^2 \sigma \ln a}$$

Получим скалярный потенциал

$$\varphi = -\frac{zI}{\pi a^2\sigma\ln a}\ln r$$

Если мы проверим выполнение граничного условия для тангенциальной компоненты электрического поля (вдоль z) на поверхности провода, то все будет в порядке. Сложнее с условием для нормальной компоненты электрической индукции. Внутри проводника поперечное электрическое поле считается равным нулю. Снаружи же оно ненулевое. Получается, что на поверхности провода должен существовать некий поверхностный заряд, обеспечивающий скачок для радиальной компоненты электрической индукции. Считается, кстати, что именно этот поверхностный заряд, порождаемый источниками ЭДС, вызывает появление электрического тока в проводах (см. например описательное изложение этого вопроса в книге Матвеева [8]).

Если векторный потенциал снаружи считать направленным вдоль оси z и искать в виде

$$\vec{A} = \vec{k}M_0\ln r,$$

то, используя граничное условие для тангенциальных компонент индукции магнитного поля, мы легко найдем:

$$M_0 = -\frac{2}{c}I$$

$$A_z = -\frac{2}{c}I\ln r$$

$$B_\varphi = \frac{2}{cr}I$$

Есть ли что-нибудь настораживающее во всех этих формулах? Пожалуй, есть. Не очень нравится то, что z-компонента электрического поля бесконечно растет при удалении от провода. Кроме того, обратим внимание на то, что для полученных нами векторного и скалярного потенциалов не выполняется условие калибровки Лоренца. Конечно, калибровки бывают разные. Но, если считать, что мы имеем дело с решениями не однородных уравнений, а уравнений с источниками, а источники (ток и заряд) удовлетворяют уравнению непрерывности, то векторный и скалярный потенциалы мы должны считать связанными калибровкой Лоренца.

Не очень ясна также и связь переменного по времени поверхностного заряда (который обсуждался выше) с электрическими токами. Поясню – электрическое поле внутри мы считаем направленным вдоль оси z, значит и вектор плотности тока направлен так же. Следовательно, дивергенция такого вектора будет иметь ненулевое значение только в том случае, если он (вектор плотности тока) зависит от z. А дивергенция должна быть ненулевой, так как она связана уравнением непрерывности с временной производной поверхностного заряда, который, как и все другие величины в нашей задаче, гармонически зависит от времени. Но с другой стороны, мы считаем, что полный ток в нашей задаче зависит лишь от времени (и постоянен в направлении z). Получается некоторая неувязка.

Сделаем тут некоторое отступление в сторону от общепринятой электродинамической теории. Ряд авторов [4,5,а также 3,стр77-78] рассматривают обобщение уравнений Максвелла с помощью функции S:

$$S = \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + div\vec{A}$$

В нашем случае функция S имеет ненулевое значение за счет зависящего от времени скалярного потенциала. И линейно зависит от длины проводника. То-есть при некотором значении z она зануляется и возрастает по модулю при удалении от этой точки (соответственно при приближении к концам проводника). Оговорим сразу – конкретное положение этой нулевой точки в данной модели неясно (ведь к скалярному потенциалу можно добавить любое постоянное по пространству значение). Но тем не менее напрашивается вопрос – неужели в такой тривиальной системе, как отрезок провода с переменным током, есть надежда обнаружить отклонения от уравнений Максвелла? Сразу скажу, несколько забегая вперед, что, по всей видимости, в данной задаче нет необходимости выходить за пределы классических представлений.

ЧАСТЬ 2. Проведем теперь решение для случая стоячей волны тока. Поля внутри проводника будем выражать через векторный потенциал.

$$\vec{A} = \vec{k}DJ_0(gr)e^{iwt}\cos hz,$$

$$g = \sqrt{-\frac{iw4\pi\mu\sigma}{c^2} - h^2} \approx \sqrt{-\frac{iw4\pi\mu\sigma}{c^2}}, \quad g^2 \approx -\frac{iw4\pi\mu\sigma}{c^2}$$

При нахождении электрического поля внутри проводника мы не задействуем скалярный потенциал, вычисляемый из условия калибровки Лоренца (из-за большого по модулю значения диэлектрической проницаемости).

$$E_z = -D\frac{iw}{c}J_0(gr)e^{iwt}\cos hz,$$

$$B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = D\frac{iwg}{c}J_1(gr)e^{iwt}\cos hz$$

$$H_\varphi = D\frac{iwg}{\mu c}J_1(gr)e^{iwt}\cos hz$$

Найдем полный ток в проводнике

$$I = I_0 e^{iwt}\cos hz$$

$$I_0 = H_\varphi(a)\frac{ac}{2} = D\frac{iwag}{2\mu}J_1(ga)$$

Если величина ga стремится к нулю,

$$I_0 = D\frac{iwa^2g^2}{4\mu} \approx D\frac{iwa^2}{4\mu}\left(-\frac{iw4\pi\mu\sigma}{c^2}\right) = D\frac{w^2a^2\pi}{c^2}\sigma, \quad D \approx I_0\frac{c^2}{w^2a^2\pi\sigma}$$

$$E_z = -D\frac{iw}{c}e^{iwt}\cos hz$$

Это электрическое поле можно выразить через скалярный потенциал

$$\varphi_- = D\frac{iw}{ch}e^{iwt}\sin hz$$

При небольших значениях z

$$\varphi_- = D\frac{iw}{c}e^{iwt}z = I_0\frac{ic}{wa^2\pi\sigma}e^{iwt}z$$

Это все внутри проводника. А снаружи – пойдем тем же путем, что и для задачи без зависимости от продольной координаты, и зададим скалярный потенциал (не выводя его из векторного потенциала при помощи условия калибровки).

$$\varphi_+ = -We^{iwt}\sin hz \ln rK_0(pr)$$

$$p = \sqrt{h^2 - \frac{w^2}{c^2}}$$

Знак «минус» перед W введен просто для удобства, чтобы в следующей формуле с логарифмом был знак «плюс».

Если pr мало,

$$K_0(pr) \to \ln\left(\frac{2}{\gamma pr}\right) = -\ln p_0 r, \quad p_0 = \frac{\gamma p}{2}$$

$$\varphi_+ \approx We^{iwt}\sin hz \ln p_0 r$$

Величина p_0 является некоторым остаточным следом поперечного волнового числа. В принципе, можно положить ее равной нулю, это равносильно прибавлению к скалярному потенциалу не зависящей от координат константы.

Приравняем при $r=a$ скалярный потенциал внешней и внутренней области, чтоб найти амплитуду W.

$$I_0\frac{ic}{wa^2\pi\sigma} = Wh\ln p_0 a$$

$$W = I_0\frac{ic}{wha^2\pi\sigma\ln p_0 a}$$

Тогда

$$\varphi_+ = I_0\frac{ic}{wha^2\pi\sigma\ln p_0 a}e^{iwt}\sin hz\ln p_0 r \qquad (3)$$

При малых z

$$\varphi_+ = I_0 \frac{ic}{wa^2\pi\sigma \ln p_0 a} e^{iwt} z \ln p_0 r \qquad (4)$$

Неизвестным остается здесь «рудимент» поперечного волнового числа p_0, но его можно считать равным единице.

Можно найти и векторный потенциал снаружи.

Все эти решения обладают те ми же недостатками, что и для случая чисто временной зависимости полей. Добавился еще один недостаток – неизвестно соотношение между продольным волновым числом и циклической частотой (нам остается только предположить, что w примерно равно hc). Чтобы попытаться их исправить, а также вынести суждение о величине остаточного поперечного волнового числа, нужно более аккуратное рассмотрение задачи.

ЧАСТЬ 3. Приступим теперь к основной части этой работы. После некоторого размышления я решил остаться в рамках уравнений Максвелла (и потенциалов, связанных калибровкой Кулона).

Проведем теперь выкладки более последовательно. Будем считать, что внутри цилиндрического проводника векторный потенциал удовлетворяет параболическому уравнению. Уравнение для скалярного потенциала внутри проводника мы вообще не рассматриваем. Сам же скалярный потенциал мы получим из условия калибровки (см. далее). Снаружи потенциалы удовлетворяют волновому уравнению. На бесконечном удалении от проводника мы должны иметь расходящиеся волны. Если же энергия волны распространяется строго вдоль проводника, имеет смысл требовать затухания волны при удалении от проводника в бесконечность.

Запишем поле векторного потенциала внутри проводника:

$$\vec{A} = \vec{k} A_z$$

$$A_z = DJ_0(gr)e^{iwt}\cos hz, \quad g = \sqrt{-\frac{iw4\pi\mu\sigma}{c^2} - h^2}$$

Найдем электрическое поле. Мы будем считать, что векторный и скалярный потенциал внутри проводника удовлетворяют условию калибровки Лоренца, поэтому для нахождения электрического поля воспользуемся не формулой

$$\vec{E} = -grad\varphi - \frac{iw}{c}\vec{A},$$

а формулой

$$\vec{E} = \frac{c}{iw\varepsilon\mu} grad\, div\vec{A} - \frac{iw}{c}\vec{A}, \qquad (5)$$

(в ней уже учтена лоренцевская калибровка).

Вычислим дивергенцию векторного потенциала:

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = -ihDJ_0(gr)e^{iwt}\sin hz$$

Электрическое поле разобьем на 2 части (первая получается за счет первого слагаемого в формуле (5), то-есть фактически за счет скалярного потенциала и лоренцевской калибровки, а вторая – соответственно за счет второго слагаемого, то-есть за счет дифференцирования векторного потенциала по времени).

$$E_{z1} = \frac{ic}{w\varepsilon\mu} h^2 DJ_0(gr)e^{iwt}\cos hz$$

$$E_{z2} = -\frac{iw}{c} DJ_0(gr)e^{iwt}\cos hz$$

Их сумма:

$$E_z = E_{z1} + E_{z2} = D\frac{i}{(\frac{w}{c})}(\frac{h^2}{\varepsilon\mu} - \frac{w^2}{c^2})J_0(gr)e^{iwt}\cos hz$$

Найдем поперечное электрическое поле.

$$E_r = \frac{c}{iw\varepsilon\mu}\frac{\partial}{\partial r}(div\vec{A}) = \frac{c}{iw\varepsilon\mu}(-hDe^{iwt}\sin hz)(-gJ_1(gr)) =$$

$$= \frac{cgh}{iw\varepsilon\mu}DJ_1(gr)e^{iwt}\sin hz$$

Перейдем к рассмотрению полей вне проводника. Будем выражать поля через электрический вектор Герца.

$$\vec{P} = \vec{k}P_z$$

$$P_z = AH_0^{(2)}(kr)e^{iwt}\cos hz, \quad k = \sqrt{\frac{w^2}{c^2} - h^2}$$

Теперь будем искать электрическое поле, соответствующее данному вектору Герца. Сперва найдем его дивергенцию.

$$div\vec{P} = \frac{\partial P_z}{\partial z} = -AhH_0^{(2)}(Kr)e^{iwt}\sin hz$$

Далее будем вычислять электрическое поле, которое также окажется разбитым на 2 части (как и внутри проводника – смотри выше).

$$E_z = grad\ div\vec{P}\Big|_z - \frac{1}{c^2}(-w^2)P_z = A(\frac{w^2}{c^2} - h^2)H_0^{(2)}(kr)e^{iwt}\cos hz$$

$$E_r = grad\ div\vec{P}\Big|_r = AhkH_1^{(2)}(kr)e^{iwt}\sin hz$$

Следующий этап – используем граничные условия для напряженности электрического поля и электрической индукции при r=*a*. Будем считать, что диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = \frac{4\pi\sigma}{iw}$$

(реальной ее частью, равной в нашем случае единице, пренебрегаем).

Воспользуемся граничным условием для нормальной компоненты электрической индукции.

$$\varepsilon\frac{cgh}{iw\varepsilon\mu}DJ_1(ga)e^{iwt}\sin hz = AhkH_1^{(2)}(ka)e^{iwt}\sin hz$$

Теперь используем равенство тангенциальных компонент электрического поля:

$$D\frac{i}{(\frac{w}{c})}(\frac{h^2}{\varepsilon\mu} - \frac{w^2}{c^2})J_0(ga)e^{iwt}\cos hz = A(\frac{w^2}{c^2} - h^2)H_0^{(2)}(ka)e^{iwt}\cos hz$$

Запишем теперь однородную систему алгебраических линейных уравнений для амплитуд A и D:

$$\begin{cases} -i\dfrac{cgh}{w\mu}DJ_1(ga) - AhkH_1^{(2)}(ka) = 0 \\ D\dfrac{i}{(\frac{w}{c})}(\dfrac{h^2}{\varepsilon\mu} - \dfrac{w^2}{c^2})J_0(ga) - A(\dfrac{w^2}{c^2} - h^2)H_0^{(2)}(ka) = 0 \end{cases}$$

Условием совместности этой системы будет равенство нулю определителя соответствующей матрицы.

$$\begin{vmatrix} -i\dfrac{cgh}{w\mu}J_1(ga) & -hkH_1^{(2)}(ka) \\ \dfrac{i}{(\frac{w}{c})}(\dfrac{h^2}{\varepsilon\mu} - \dfrac{w^2}{c^2})J_0(ga) & -(\dfrac{w^2}{c^2} - h^2)H_0^{(2)}(ka) \end{vmatrix} = 0$$

Вычислим этот определитель:

$$\frac{gkJ_1(ga)}{\mu}H_0^{(2)}(ka) - H_1^{(2)}(Ka)(\frac{h^2}{\varepsilon\mu} - \frac{w^2}{c^2})J_0(ga) = 0 \qquad (6)$$

Это есть дисперсионное уравнение. Решая его, можно найти соотношение между продольным волновым числом h и циклической частотой w. Напомню, что

$$k = \sqrt{\frac{w^2}{c^2} - h^2}, \quad g = \sqrt{-\frac{iw4\pi\mu\sigma}{c^2} - h^2}$$

Запишем теперь выражение для скалярного потенциала (вычисленного через вектор Герца):

$$\varphi = -div\vec{P} = AhH_0^{(2)}(kr)e^{iwt}\sin hz$$

При малых значениях продольной координаты z:

$$\varphi = Ah^2H_0^{(2)}(kr)e^{iwt}z$$

Выразим амплитуду A через D (то-есть амплитуду поля внутри проводника).

$$A = D(-i\frac{cgh}{w\mu}J_1(ga))\frac{1}{hkH_1^{(2)}(ka)} = D\frac{J_1(ga)}{H_1^{(2)}(ka)}\frac{-ig}{\mu k\frac{w}{c}}$$

$$\varphi = D\frac{-icgh^2H_0^{(2)}(kr)}{\mu kw}\frac{J_1(ga)}{H_1^{(2)}(ka)}e^{iwt}z$$

Обратим внимание, что выражение для скалярного потенциала имеет полюс на нулевой частоте. Попробуем найти асимптотику дисперсионного уравнения при приближении частоты к нулю.

Будем считать, что

$$H_0^{(2)}(ka) = \frac{2i}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma Ka},$$

$$H_1^{(2)}(ka) = \frac{i}{\pi}\frac{2}{Ka},$$

$$J_1(ga) = \frac{ga}{2}$$

$$J_0(ga) = 1$$

где γ = 1,781… - это постоянная Эйлера

Тогда дисперсионное уравнение принимает такой вид

$$\frac{g^2ka}{2\mu}\frac{2i}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma ka} - \frac{2i}{\pi}\frac{1}{ka}(\frac{h^2}{\varepsilon\mu} - \frac{w^2}{c^2}) = 0$$

Домножим на ka:

$$\frac{g^2k^2a^2}{2\mu}\ln\frac{2}{\gamma ka}-(\frac{h^2}{\varepsilon\mu}-\frac{w^2}{c^2})=0$$

Теперь попробуем считать, что частота при своем стремлении к нулю пропорциональна квадрату продольного волнового числа.

$$w=\tau h^2$$

$$g=\sqrt{-iw\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}-h^2}=\sqrt{-i\tau h^2\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}-h^2}=(\sqrt{-1})h\sqrt{i\tau\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}-1}$$

$$g^2=-h^2(i\tau\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}-1)$$

$$\varepsilon=\frac{4\pi\sigma}{iw}=\frac{4\pi\sigma}{i\tau h^2}$$

$$k=\sqrt{\frac{w^2}{c^2}-h^2}=\sqrt{\frac{\tau^2h^4}{c^2}-h^2}$$

При малых k

$$k=h\sqrt{-1}$$

$$k^2=-h^2$$

Тогда

$$-h^2(i\tau\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}-1)(-h^2)\frac{a^2}{2\mu}\ln\frac{2}{\gamma h\sqrt{-1}a}-(\frac{h^4 i\tau}{4\pi\mu\sigma}-\frac{\tau^2h^4}{c^2})=0$$

$$(i\tau\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}-1)\frac{a^2}{2\mu}\ln\frac{2}{\gamma h\sqrt{-1}a}-(\frac{i\tau}{4\pi\mu\sigma}-\frac{\tau^2}{c^2})=0$$

Мы получили квадратное уравнение для величины τ. Попробуем его упростить. Во второй скобке мы смело опускаем первое слагаемое, так как оно мало при больших значениях проводимости.

В первой скобке хочется пренебречь вторым слагаемым (единицей), но здесь такой уверенности нет, так как скорость света в квадрате (в знаменателе) тоже большая величина, как и проводимость. Но попробуем все-таки так сделать.

$$i\tau\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{a^2}{2\mu}\ln\frac{2}{\gamma h\sqrt{-1}a}+\frac{\tau^2}{c^2}=0$$

$$i2\pi\mu\sigma\frac{a^2}{\mu}\ln\frac{2}{\gamma h\sqrt{-1}a}=-\tau$$

$$\tau=i2\pi\sigma a^2\ln\frac{\gamma h\sqrt{-1}a}{2}$$

$$w=i2\pi\sigma a^2h^2\ln\frac{\gamma h\sqrt{-1}a}{2}$$

Видно, кстати, что наше допущение (насчет пренебрежения единицей) было вполне справедливым.

Вернемся к выражению для скалярного потенциала. Подставим в него «параболическое» выражение для частоты.

$$\varphi=D\frac{-icgh^2H_0^{(2)}(kr)}{i2\pi\sigma a^2h^2\ln\frac{\gamma h\sqrt{-1}a}{2}}\frac{J_1(ga)}{\mu kH_1^{(2)}(ka)}e^{iwt}z=-D\frac{cgH_0^{(2)}(kr)}{2\pi\sigma a^2\ln\frac{\gamma h\sqrt{-1}a}{2}}\frac{J_1(ga)}{\mu kH_1^{(2)}(ka)}e^{iwt}z$$

Видно, что квадрат продольного волнового числа сокращается. Скалярный потенциал как бы отрывается от векторного, из которого он был получен с помощью условия калибровки Лоренца, то-есть выглядит уже вполне независимым от него. За счет наличия частотного полюса (при w=0) и параболической дисперсионной зависимости теряется зависимость от h в числителе, так что при первом взгляде трудно сказать, что это выражение было получено дифференцированием по z векторного потенциала.

Перейдем теперь к случаю малых *ka* и *ga*. Тогда

$$\varphi = -D\frac{g^2 \ln\frac{\gamma h\sqrt{-1}r}{2}}{\mu 4\pi\sigma \ln\frac{\gamma h\sqrt{-1}a}{2}} e^{iwt} z$$

Учтем, что

$$D = I_0 \frac{2\mu}{iwagJ_1(ga)} \approx D\frac{4\mu}{iwa^2 g^2}$$

Тогда

$$\varphi = I_0 \frac{ic \ln\frac{\gamma h\sqrt{-1}r}{2}}{wa^2 \pi\sigma \ln\frac{\gamma h\sqrt{-1}a}{2}} e^{iwt} z$$

Это совпадает с полученным нами ранее выражением (4), когда мы искали скалярный потенциал, не согласующийся с калибровкой Лоренца. Таким образом, «остаточное» поперечное волновое число можно записать так:

$$p_0 = \frac{\gamma h\sqrt{-1}}{2}$$

Кстати, при малых частотах можно мысленно разрезать провод и разнести его куски пространственно (сразу скажу, что математической модели этого процесса на данный момент я не имею). Тогда мы должны получить кулоновские поля вокруг отдельных (возможно, заряженных) кусков проводника. Все это наталкивает на мысль, что электромагнитные поля можно выражать только через векторный потенциал. Скалярный же потенциал, независимый от векторного, можно считать (для макроскопических полей по крайней мере) только предельным случаем при наличии в зоне действия электромагнитного поля протяженных объектов с диэлектрической проницаемостью, имеющей полюсы по частоте (в настоящем или в прошлом времени – я имею ввиду, что эти сперва единые объекты позже могли быть «растащены» на части).

Заметим тут же, что при данном подходе мы не пренебрегаем наличием поперечного электрического поля внутри проводника, поэтому нет нужды вводить поверхностный заряд для компенсации поперечного электрического поля снаружи.

От малых значений частоты перейдем теперь к большим.

Вернемся к дисперсионному соотношению (6). Будем считать, что

$$J_1(ga) = -iJ_0(ga)$$

Тогда

$$\frac{igkH_0^{(2)}(ka)}{\mu} + H_1^{(2)}(Ka)(\frac{h^2}{\varepsilon\mu} - \frac{w^2}{c^2}) = 0$$

$$\frac{ikH_0^{(2)}(ka)}{H_1^{(2)}(Ka)} - (\frac{w^2}{c^2} - \frac{h^2}{\varepsilon\mu})\frac{\mu}{g} = 0$$

$$\frac{ikH_0^{(2)}(ka)}{H_1^{(2)}(Ka)} - \frac{w^2}{c^2}\frac{\mu}{g} = 0$$

Учтем, что

$$g=\sqrt{-iw\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}-h^2}\approx\sqrt{-i\frac{w^2}{c^2}\frac{4\pi\mu\sigma}{w}}=(\sqrt{-i})\frac{w}{c}\sqrt{\frac{4\pi\mu\sigma}{w}}\approx\frac{w}{c}\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\mu}$$

Тогда дисперсионное уравнение принимает следующий вид:

$$ik\frac{H_0^{(2)}(ka)}{H_1^{(2)}(Ka)}=\frac{w}{c}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Это напоминает дисперсионное соотношение для медленных поверхностных волн в однопроводной линии, которое обычно получают, используя граничные условия Леонтовича. Кроме того, поля снаружи часто выражают не через функции Ханкеля, а через функции Макдональда.

Повторим наши выкладки, используя функции Макдональда (для внешней области).

$$P_z=AK_0(pr)e^{iwt}\cos hz,\quad p=\sqrt{h^2-\frac{w^2}{c^2}}$$

$$div\vec{P}=\frac{\partial P_z}{\partial z}=-AhK_0(pr)e^{iwt}\sin hz$$

Далее вычислим электрическое поле:

$$E_z=grad\,div\vec{P}\Big|_z-\frac{1}{c^2}(-w^2)P_z=A(\frac{w^2}{c^2}-h^2)K_0(pr)e^{iwt}\cos hz$$

$$E_r=grad\,div\vec{P}\Big|_r=AhpK_1(pr)e^{iwt}\sin hz$$

Используя граничные условия, получим уравнения

$$\begin{cases}-i\dfrac{cgh}{w\mu}DJ_1(ga)-AhpK_0(pa)=0\\ D\dfrac{i}{(\frac{w}{c})}(\dfrac{h^2}{\varepsilon\mu}-\dfrac{w^2}{c^2})J_0(ga)-A(\dfrac{w^2}{c^2}-h^2)K_1(pa)=0\end{cases}$$

Вычисляя детерминант этой системы, получим такое дисперсионное уравнение

$$\frac{gp}{\mu}J_1(ga)K_0(pa)-(\frac{h^2}{\varepsilon\mu}-\frac{w^2}{c^2})K_1(pa)J_0(ga)=0$$

Переходя к высокочастотному пределу, несложно получить дисперсионное уравнение для медленных волн в однопроводной линии [1,2].

Кстати, ко всем этим соотношениям можно было прийти и опираясь на известное решение задачи о волнах в диэлектрическом цилиндре [2,7]. Нужно только соответствующим образом выбрать диэлектрическую проницаемость.

На этом мы пока остановимся. В заключение отметим, что бесконечный проводник с медленной волной тока ничего не излучает – поля экспоненциально затухают при удалении от него. Но ограниченный отрезок такой линии должен излучать. Так что, на мой взгляд, антенну можно рассматривать как отрезок проводника, в котором возбуждена стоячая волна с рассмотренной выше дисперсионной характеристикой.

Список литературы:

1) Л.А.Вайнштейн «Электромагнитные волны» М. Радио и связь 1988.
2) М.Б.Виноградова, О.В.Руденко, А.П.Сухоруков «Теория волн» » М. “Наука” 1979.

3) А.Соколов, Д.Иваненко «Квантовая теория поля» Москва, Ленинград, «Государственное издательство технико-теоретической литературы» 1952.
4) А.К. Томилин «Основы обобщенной электродинамики» (книга найдена в Интернете) 2009
5) П.А. Жилин «Реальность и механика», статья найдена в Интернете
6) А.Н.Тихонов, А,А,Самарский «Уравнения математической физики» » М. “Наука” 1977.
7) А.Зоммерфельд «Электродинамика», М. «Изд.иностранной лит-ры»,1958
8)А.Н.Матвеев «Электричество и магнетизм» М. «Высшая школа» 1983.
9) С.Г.Калашников «Электричество» М. «Наука», 1970.