Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

К проблеме симметрии магнитных и электрических источников поля.

Уже несколько десятков лет физиков волнует проблема магнитного монополя. В уравнения Максвелла электрическое и магнитное поле входят симметричным образом. Естественно, хотелось бы ожидать аналогичной симметрии и для источников этих полей – электрических и магнитных токов и зарядов. Но в природе на сей момент найдены лишь электрические источники (токи и заряды). С некоторой натяжкой, приближенно, можно считать маленький виток электрического тока магнитным диполем – на большом расстоянии их поля практически одинаковы. Если же электрический ток в таком витке переменный, можно считать, что наряду с «двугорбой» плотностью магнитного заряда (представляющей собой изменяющийся диполь) имеется и дельта-образный (точечный) переменный магнитный ток. Но с магнитными монополями сложнее – ничего похожего на них до сих пор не обнаружено. Если же принимать за монополь один из концов длинного тонкого соленоида с электрическим током, то это есть, на мой взгляд, чересчур «притянутое за уши» приближение - интересно найти именно изолированный в пространстве монополь. Безо всякой подходящей к нему особой линии.

Попробуем подойти к проблеме с другого конца. Что если не увеличивать число сущностей, а наоборот сократить их количество для достижения большей симметрии? Более конкретно – давайте откажемся от понятия электрического заряда. Уважаемый читатель, я прошу не откидывать в этом месте в угол листки с данным текстом, или, если вы читаете электронный вариант статьи, не закрывать его лихорадочным движением мышки. Электрическому заряду будет предложена вполне адекватная, на мой взгляд, замена. Давайте продвинемся дальше.

Запишем лагранжиан для частицы, находящейся в электромагнитном поле.

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\vec{v}\vec{A} - e\varphi$$

Используя это выражение, можно не только найти дифференциальные уравнения движения заряженной частицы, но и судить об источниках в уравнениях для векторного и скалярного потенциала. Для этого нужно вспомнить, что заряд, умноженный на скорость, представляет собой электрический ток. Далее – первое слагаемое в лагранжиане отбросить, а величину e (заряд частицы) во втором и третьем слагаемых заменить на плотность электрического заряда. Получим:

$$L' = \frac{1}{c}\vec{j}\vec{A} - \rho\varphi$$

Теперь, если продифференцировать это выражение по потенциалам, мы получим правые части (источники) в уравнениях для потенциалов (с точностью до некоторого числового множителя).

Двинемся дальше. Чтобы сделать дальнейшую цепочку рассуждений более последовательной, лучше на время перейти от классической механики к квантовой – к теории уравнения Дирака. Прошу прощения у читателя, если он не углублялся в эту область научного знания. Спешу успокоить - в скором времени мы вернемся к «классике».

Учтем, что вектор скорости, деленный на скорость света, имеет релятивистский квантовый аналог – вектор, составленный из матриц Дирака. Запишем теперь такое выражение для лагранжиана:

$$L' = (e\psi^*\vec{\alpha}\psi)\vec{A} - (e\psi^* E\psi)\varphi$$

Здесь E – это единичная матрица. Если же «опустить» запись волновой функции, получим

$$L' = (e\vec{\alpha})\vec{A} - (eE)\varphi$$

Первая скобка представляет собой плотность тока, а вторая – плотность заряда. Кстати, отметим тут, что подобная плотность заряда (в теории Дирака) строго положительна (если, конечно, положителен коэффициент e). Что, как вы понимаете, не очень хорошо согласуется с двумя возможными знаками заряда.

Теперь перейдем к предлагаемым изменениям. Слагаемое с произведением плотности заряда на скалярный потенциал опустим. То-есть мы фактически отказываемся не только от электрического заряда, но и от скалярного потенциала как от фундаментальных величин. Какое основание для этого? Например, такое: считается, что спин электромагнитного поля равен единице. Значит электромагнитное поле – это векторная материя (в отличие, например, от спинорной материи – электронно-позитронного поля). В квантовые уравнения, как известно, входят не напряженности полей, а потенциалы. Значит, эти потенциалы должны иметь векторный, а не скалярный характер. Скалярные же поля (применяемые в теории электромагнетизма) тогда будут некими вторичными, вспомогательными величинами.

Далее запишем следующий лагранжиан:

$$L'' = (e\vec{\alpha})\vec{A} - (e\vec{\sigma})\vec{A}^m$$

Или

$$L'' = (e\psi^*\vec{\alpha}\psi)\vec{A} - (e\psi^*\vec{\sigma}\psi)\vec{A}^m$$

Здесь σ – это матрица 4 на 4, составленная из двумерных матриц Паули.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A^m – это векторный магнитный потенциал (иногда для удобства его используют в технических расчетах электромагнитных полей, наряду с магнитными источниками).

Подобный оператор σ является ничем иным, как спином электрона. Так что лагранжиан можно записать и так:

$$L'' = (e\vec{\alpha})\vec{A} - (e\frac{2}{\hbar}\vec{s})\vec{A}^m$$

Если векторы спина и магнитного векторного потенциала считать:

1) обычными, классическими векторами,

2) направленными вдоль некоторой пространственной оси, например z,

то лагранжиан аналогичен предыдущему, если

$$e_p = \frac{2}{\hbar} s_z$$

$$\varphi_p = A_z^m$$

То-есть, проекция спина на некоторую ось фактически представляет собой заряд, домноженный на величину

$$\frac{\hbar}{2}.$$

А проекция магнитного векторного потенциала на ту же ось – это фактически скалярный потенциал. Введенные таким образом величины помечены индексом “p”, чтоб отличать их от обычных (общепринятых).

Кстати, спин является квантовым вектором (оператором), и его проекция на любую ось имеет только два значения (см. практически любую книгу по квантовой механике). Это можно считать аналогом двух значений электрического заряда.

Итак, выходит, что частицы с одинаковыми проекциями спина на некоторую ось должны отталкиваться (аналогично одноименным зарядам). А с разными проекциями – притягиваться.

Но в общепринятой теории плотность электрического заряда является скаляром (относительно трехмерных вращений, группу Лоренца мы здесь не рассматриваем). Чтобы учесть геометрический характер вводимой нами величины, попробуем считать ее модуль пропорциональным длине вектора спина (точнее, вектора объемной плотности спина, раз мы переходим к плотностям). Аналогично модуль скалярного потенциала можно считать равным длине вектора магнитного потенциала.

$$|\rho| = \frac{2}{\hbar}|\vec{S}|$$

$$|\varphi| = |\vec{A}^m|$$

Что же насчет знака заряда и скалярного потенциала – их знак определяется направлением вращения, которое порождает спин и векторный магнитный потенциал.

А как все это соотносится с плотностью заряда из теории Дирака? Если значение константы e положительно, то величина

$$e\psi^* E\psi = e(\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4)$$

тоже всегда будет положительной.

Будем считать величину дираковской плотности заряда (обозначим ее индексом “d”) суммой двух плотностей, соответствующим разным значениям спина (или разным направлениям вращения).

$$\rho_d = e(\psi^* E\psi) = e(\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4) = \rho_{d1} + \rho_{d2}$$

Если вращение происходит вдоль оси z, то это выглядит так:

$$\rho_{d1} = e(\psi_1^*\psi_1 + \psi_3^*\psi_3)$$

$$\rho_{d2} = e(\psi_2^*\psi_2 + \psi_4^*\psi_4)$$

Тогда положительной плотности заряда соответствует

$$\rho = \rho_{d1},$$

а отрицательной

$$\rho = -\rho_{d2}.$$

Именно дираковская плотность заряда связана уравнением непрерывности с плотностью тока.

Чем можно обосновать подобное сопоставление заряда с проекцией спина? Вспомним курс квантовой физики или химии – как заполняются электронные оболочки атома. Двум электронам с различными направлениями спина ничего не мешает находиться в одном состоянии неопределенно долго.

Теперь сопоставим наш лагранжиан с лагранжианом, куда наряду с электрическим током симметрично входит магнитный ток.

$$L''' = \frac{1}{c}\vec{j}\vec{A} - \frac{1}{c}\vec{j}^m\vec{A}^m$$

Это позволяет считать, что

$$\frac{1}{c}\vec{j}^m = e\frac{2}{\hbar}\vec{S}$$

$$\vec{j}^m = \frac{2ec}{\hbar}\vec{S}$$

Так как спин электрона представляет собой реальную физическую величину, данный магнитный ток – тоже реальный, а не фиктивный.

Волновое уравнение для магнитного потенциала выглядит с учетом всего этого так:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}^m - \Delta\vec{A}^m = \frac{4\pi}{c}\vec{j}^m = \frac{8\pi e}{\hbar}\vec{S}$$

Подведем краткий итог всего вышеизложенного материала. Предполагается, что не существуют не только магнитные монополи, но и электрические (то-есть заряды). Зато реально существует магнитный ток, который есть не что иное, как спин (то-есть плотность магнитного тока пропорциональна плотности спина – см. предыдущую формулу). Этот спин является источником для поля магнитного векторного потенциала. Частицы с одинаковой проекцией спина на некоторую ось отталкиваются, с разными проекциями – притягиваются. То-есть фактически проекция спина заменяет заряд.

Список литературы:

1) Голдстейн «Классическая механика», М. «Наука» 1975
2) А.Вайнштейн «Электромагнитные волны» М. Радио и связь 1988.
3) А.А.Соколов, Ю.М.Лоскутов, И.М.Тернов «Квантовая механика» М. “Просвещение” 1965.
4) А.Соколов, Д.Иваненко «Квантовая теория поля» Москва, Ленинград, «Государственное издательство технико-теоретической литературы» 1952.