Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

К закону электромагнитной индукции.

В известных в нашей стране «Фейнмановских лекциях по физике» можно найти сентенцию авторов насчет некоторой двойственности закона электромагнитной индукции. Процитирую: «Мы не знаем в физике ни одного такого примера, когда бы простой и точный закон требовал для своего настоящего понимания анализа в терминах двух разных явлений» [1, стр.54].

Выдвинем возможную гипотезу для того, чтоб привести эту двойственность к «единому знаменателю» (хотя бы формальным образом). Чтобы нащупать нужный путь, нам придется произвести действия, которые могут повлиять на форму уравнений Максвелла. Эти изменения будут затрагивать производную по времени. Мы попробуем заменить частную производную по времени на полную. Уточню – я нисколько не претендую на приоритет в таком предложении – это предложение уже не раз высказывалось в статьях, которые можно найти в Интернете. Более того, имеется мнение, что и сам Максвелл, записывая свои уравнения, имел ввиду именно полные производные по времени. Я пока постараюсь ограничиться случаем нерелятивистских скоростей (чтобы не вызывать подозрений в покушении на релятивистскую инвариантность уравнений Максвелла). И упомянутое изменение интерпретации производной применю к выражению электрического поля через векторный потенциал.

Вместо известной формулы для соленоидального электрического поля

$$\vec{E}_{sol} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (1)$$

мы введем такую:

$$\vec{E}_{sol} = -\frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{V}\frac{\partial}{\partial \vec{r}})\vec{A}\right) \qquad (2)$$

Кстати, чтобы не пугать читателей, уверенных в полной непогрешимости уравнений Максвелла (а чтоб получить измененное уравнение Максвелла, достаточно взять ротор от уравнения (2)), в принципе можно заменить значок Е на какой-либо другой, например на «I», и считать его неким «эффективным» полем. Но я все же оставлю здесь обозначение Е.

Возникает вопрос – в каких случаях при вычислении полной производной по времени мы должны считать пространственные координаты зависимыми от времени и вычислять конвективную производную? И в каких, соответственно, считать эти координаты независимыми переменными и ограничиваться вычислением частной производной по времени?

Предлагаю использовать следующий «принцип неподвижности среды»:

1. Истинно независимыми будем считать пространственные координаты в тех областях, где среда покоится.
2. В любых областях, где среда движется, пространственные координаты считаются зависимыми (от времени и от координат некоторой локальной системы отсчета, где данный участок среды неподвижен).

Уточню – все вычисления полей предлагается проводить в неподвижной системе отсчета (под ней подразумеваем инерциальную систему отсчета, в которой магнитное поле является статическим, или хотя бы неподвижны источники, например, провода, его создающие). Если на некотором участке находится движущаяся проводящая среда, мы считаем координаты на этом участке зависимыми. Отмечу специально, что скорость зависимой системы координат относительно независимой отличается знаком от скорости среды (частиц среды). В последующие формулы будем подставлять именно скорость среды, обозначая ее маленькой буквой v.

$$\vec{E}_{sol} = -\frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - (\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})\vec{A}\right) \qquad (3)$$

Далее - возьмем оператор rot от уравнения (3).

$$rot\vec{E}_{sol} = -\frac{1}{c}\left(rot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - rot(\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})\vec{A}\right) = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial(rot\vec{A})}{\partial t} - rot(\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})\vec{A}\right) =$$

$$= -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - rot(\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})\vec{A}\right)$$

Значок “sol”, означающий соленоидальную часть поля, можно убрать, так как при подставлении под знак ротора потенциальной части поля мы получим ноль.

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c}rot(\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})\vec{A} \qquad (4)$$

Если в некоторый момент времени просуммировать (проинтегрировать) это уравнение по поверхности, натянутой на какой-нибудь замкнутый контур (возможно, движущийся), мы получим

$$\oint\vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\iint_s\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{s} + \frac{1}{c}\oint(\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})\vec{A}d\vec{l} \qquad (5)$$

Вернемся уравнению (4). И используем известную формулу для градиента скалярного произведения двух векторных полей

$$grad(\vec{D}\vec{V}) = (\vec{D}\nabla)\vec{V} + (\vec{V}\nabla)\vec{D} + [\vec{D}\ rot\vec{V}] + [\vec{V}\ rot\vec{D}]$$

Отсюда следует, что

$$(\vec{V}\nabla)\vec{D} = grad(\vec{D}\vec{V}) - (\vec{D}\nabla)\vec{V} - [\vec{D}\ rot\vec{V}] - [\vec{V}\ rot\vec{D}]$$

Тогда

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c}rot\{grad(\vec{A}\vec{v}) - (\vec{A}\nabla)\vec{v} - [\vec{A}\,rot\vec{v}] - [\vec{v}\ rot\vec{A}]\} =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c}\{rot\ grad(\vec{A}\vec{v}) - rot(\vec{A}\nabla)\vec{v} - rot[\vec{A}\,rot\vec{v}] - rot[\vec{v}\ rot\vec{A}]\} =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{c}rot(\vec{A}\nabla)\vec{v} - \frac{1}{c}rot[\vec{A}\,rot\vec{v}] - \frac{1}{c}rot[\vec{v}\ \vec{B}]$$

Теперь проинтегрируем по поверхности, натянутой на контур:

$$\oint\vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\iint_s\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{s} - \frac{1}{c}\oint(\vec{A}\nabla)\vec{v}d\vec{l} - \frac{1}{c}\oint[\vec{A}\,rot\vec{v}]d\vec{l} - \frac{1}{c}\oint[\vec{v}\ \vec{B}]d\vec{l} \qquad (6)$$

Но имеются основание для того, чтобы считать скорость константой при выполнении всех этих преобразований. Дело в том, что градиент от скалярного произведения скорости и векторного потенциала вычисляется при выводе уравнений движения частиц через уравнения Лагранжа (а ведь среда состоит из частиц). И скорость при выполнении этих операций считается не зависящей от координат. Поэтому есть резон исключить из соотношения (6) члены, содержащие пространственные производные скорости (для полной убедительности, конечно, неплохо бы провести экспериментальную проверку). Получаем в итоге:

$$\oint\vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\iint_s\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{s} - \frac{1}{c}\oint[\vec{v}\ \vec{B}]d\vec{l}$$

Сходное выражение приведено в книге [3] как «наиболее общая форма закона индукции». Но есть одно отличие - там под скоростью v подразумевается не скорость частиц, а «скорость движения линейного элемента ограничивающего контура». Я же предполагаю, что скорость контура вообще не важна, важна лишь скорость частиц среды, через которую он проходит. Понятие магнитного потока при таком подходе можно не использовать. Подозреваю, что использование закона индукции с такой интерпретацией скорости разрешит известные парадоксы электродинамики, в частности парадокс Геринга.

Список литературы:

1) Фейнман, Лейтон, Сэндс «Фейнмановские лекции по физике» Т.6, М. «Мир» 1977
2) Ландау, Лифшиц «Теория поля», М. «Наука» 1967
3) Поль «Учение об электричестве», М. «ГИФМЛ» 1962
4) Тамм И.Е. «Основы теории электричества», М. "Наука" 1973.
5) Менде Ф.Ф. «Векторный потенциал магнитного поля и природа его возникновения» (найдено в Интернете).