Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Модификация силы Лоренца.

Известно, что если применить формулу для силы Лоренца к случаю двух электронов, движущихся перпендикулярно друг другу, то окажется нарушенным третий закон Ньютона [1,2]. Попробуем критически исследовать процедуры, с помощью которых получается столь противоречивый результат. Может удастся внести в них относительно небольшие изменения, чтобы получить более симметричную картину взаимодействия точечных зарядов?

Пусть вторая точечная заряженная частица действует на первую. Считаем, что вторая частица движется равномерно и прямолинейно. Уточним выражение для поля, созданного второй частицей. Источники поля – заряд и ток. Заряд:

$$\rho = e\delta(\vec r - \vec r_2)$$

Уравнение для созданного этим зарядом поля (поля скалярного потенциала):

$$\triangle\varphi = -4\pi\rho$$

$$\triangle\varphi = -4\pi e\delta(\vec r - \vec r_2)$$

Его решение:

$$\varphi = \frac{e}{|\vec r - \vec r_2|} \qquad (1)$$

Ток же такой:

$$\vec j = \rho\vec V_2$$

$$\vec j = e\delta(\vec r - \vec r_2)\vec V_2$$

Этот ток создает поле векторного потенциала. Уравнение для него такое:

$$\triangle\vec A = -\frac{4\pi}{c}\vec j$$

$$\triangle\vec A = -\frac{4\pi}{c}e\delta(\vec r - \vec r_2)\vec V_2$$

Его решение:

$$\vec A = \frac{e\vec V_2}{c|\vec r - \vec r_2|} \qquad (2)$$

Видно, что направление получившегося вектора одинаково для всего пространства. Модуль же его пропорционален значению скалярного потенциала.

$$\vec A = \frac{\vec V_2}{c}\varphi$$

Во всех этих выражениях $\vec r_2$ есть функция времени (это есть радиус-вектор, указывающий на вторую движущуюся частицу).

Запишем общепринятое выражение лагранжиана для первой частицы:

$$L = \frac{m\vec V^2}{2} + \frac{e}{c}\vec V\vec A - e\varphi$$

Взяв градиент по скоростям, мы получим так называемый обобщенный импульс. Обозначим его буквой R, чтоб не спутать с обычным.

$$\vec R = m\vec V + \frac{e}{c}\vec A$$

Далее процедура получения уравнений Лагранжа предусматривает взятие производной по времени от обобщенного импульса. Причем при дифференцировании векторного потенциала берется как локальная, так и конвективная производная, то-есть считается, что точка, в которой «наблюдается» дифференцируемое поле, движется вместе с частицей (для которой ищется уравнение движения) [7]. И, соответственно, точка, в которой поле «наблюдается» в момент t, не совпадает с точкой, где оно «наблюдается» в момент t+dt.

Это все относится ко второй части обобщенного импульса, к дифференцированию векторного потенциала. А как обстоит дело с первой частью, с дифференцированием скорости? Для того, чтоб уточнить определение производной скорости, нужно просмотреть разделы кинематики в книгах по теоретической механике [4,5]. Там мы обнаружим, что векторы скоростей в моменты времени t и t+dt переносятся в одну точку и там уже вычитаются для вычисления производной. И вектор скорости (векторное поле скорости) считается функцией только лишь времени, но не координат. Таким образом вычисление ускорения представляет собой взятие локальной производной. Что касается вывода уравнений Лагранжа для потенциалов, не зависящих от скорости, то обычно смысл производной не уточняется. Но, по всей видимости, определение производной должно быть такое же, как и при вычислении ускорения в кинематике – ведь в результате получаются уравнения с таким же ускорением, что и при применении законов Ньютона. В случае применения конвективных производных уравнения механики более походили бы на гидродинамические. Это же касается и вычисления производной для скорости в случае наличия магнитных полей (когда потенциал зависит от скорости). Несколько странная ситуация, согласитесь: производная двух частей одной функции определяется по-разному! Можно ли попробовать что-то изменить? Мои предложения состоят в том, чтобы:

1. Производную для обеих частей обобщенного импульса вычислять единообразно, по одному правилу.

2. Выбрать правило, аналогичное правилу вычислению ускорения, когда дифференцируемая функция в моменты времени t и t+dt берется в одной пространственной точке.

Таким образом, при дифференцировании по времени векторного потенциала предлагается не учитывать производные по координатам радиус-вектора точки наблюдения.

В общем выражении для поля векторного потенциала обычно указывают в качестве аргументов время и радиус-вектор точки наблюдения поля. Но конкретное выражение для поля движущегося заряда (2) не зависит от времени явным образом, зато содержит в качестве аргумента еще и радиус-вектор источника поля, зависящий от времени. Нужно ли проводить дифференцирование по координатам заряда-источника, чтоб учесть неявную зависимость от времени? Попробуем с этим разобраться.

Сделаем предположение, что в уравнениях Лагранжа для нескольких частиц каждой частице соответствует не только собственный набор из трех координат q_i (что естественно), но и собственное время, свое для каждой частицы (t_i). Каково обоснование этого? Если перейти к квантовой механике, то там набор из нескольких частиц описывается уравнением Шредингера, где время одно, но число координат – 3N (N это число частиц, внутренние переменные здесь не рассматриваем). Несимметричность вхождения времени и пространственных координат здесь не вызывает вопросов – ведь уравнение Шредингера не обязано быть инвариантным относительно группы Лоренца. Но если мы перейдем к релятивистским уравнениям (например к уравнению Клейна-Фока), мы должны иметь в них пространственные и временные координаты входящими симметричным образом. Значит не только тройка координат умножается на число частиц, но и время уже не одно. Число времен равняется N. Попробуем «следом» такой релятивистски-квантовой ситуации считать наличие своего времени у каждой частицы, описываемой уравнениями Лагранжа. Для систем, где потенциал зависит лишь от координат, это не приведет ни к каким изменениям уравнений. А для систем с потенциалом, зависящим от скорости (случай наличия магнитного поля)? Нам приходится находить производную по времени от векторного потенциала, который, вообще говоря, может зависеть от координат источников. Но так как координаты источников зависят от собственного времени этих частиц-источников, а не от «нашего» времени, делаем вывод – дифференцировать вектор-потенциал по координатам источников не нужно.

Вернемся к выражению для вектор-потенциала движущегося заряда (2). Явной зависимости от времени нет, так что производная от обобщенного импульса равна произведению массы на ускорение, то-есть производной по времени от обычного импульса.

Вычислим пространственный градиент от лагранжиана.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{V}\vec{A}) - e\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{V}\frac{e\vec{V}_2}{c\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|}) - e\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\frac{e}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|}$$

Для этого случая нецелесообразно применять формулу из векторного анализа для градиента скалярного произведения постоянного вектора на переменный (эту формулу я все же здесь приведу, она потребуется чуть позже):

$$\nabla(\vec{C}\vec{A}) = (\vec{C}\,\nabla)\vec{A} + \left[\vec{C}\,rot\vec{A}\right] \qquad (3)$$

Используем постоянство (по пространству) векторного поля скорости заряда-источника.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{e^2}{c^2}\vec{V}\vec{V}_2\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|} - e^2\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = e^2(\frac{\vec{V}\vec{V}_2}{c^2}-1)\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|}$$

Видно, что функция под знаком градиента пропорциональна кулоновскому потенциалу точечного заряда (1).

Уравнение движения выглядит так

$$m\ddot{\vec{r}} = e^2(\frac{\vec{V}\vec{V}_2}{c^2}-1)\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = -e^2(\frac{\vec{V}\vec{V}_2}{c^2}-1)\frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|^3}$$

Сила, действующая на первый заряд со стороны второго, такая:

$$\vec{F} = -e^2(\frac{\vec{V}\vec{V}_2}{c^2}-1)\frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|^3}$$

Эта центральная сила, она направлена вдоль линии, соединяющей обе частицы. Видно, что третий закон Ньютона будет выполняться для сил, вычисляемых по такой формуле. Для случая перпендикулярных друг другу скоростей зарядов зависящая от скоростей добавка к кулоновской силе равна нулю. В случае зарядов, движущихся в параллельных проводах и находящихся напротив друг друга действующие силы равны силам, вычисленным с помощью формулы Лоренца. Если же заряды движутся «цепочкой» по одной линии, они также будут оказывать добавочное (по отношению к кулоновскому) воздействие друг на друга.

Было бы странно, если бы выражение столь несложной структуры не было предложено никем из физиков ранее. Экскурс в историю электричества [9] показывает, что сходное выражение для так называемого «кинетического потенциала» (приводящее к такому же выражению для силы) предлагалось Клаузиусом в девятнадцатом веке.

Перейдем теперь к полю векторного потенциала произвольного вида (присутствует также и поле скалярного потенциала, естественно). Будем считать, что поля определяются в общем случае не статическими, а волновыми уравнениями:

$$\triangle\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

$$\triangle\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Напомню, что мы пробуем оставить для производной векторного потенциала по времени (появляющейся при выводе уравнений Лагранжа) только локальную ее часть. Уравнения Лагранжа в этом случае приобретают такой вид:

$$m\ddot{\vec{V}} + \frac{e}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}(\vec{V}\vec{A}) + e\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\varphi = 0$$

Здесь (в отличие от предыдущего частного случая) удобно применить для преобразования градиента формулу (3). Тогда (обозначив градиент уже с помощью оператора «набла»)

$$m\ddot{\vec{V}} + \frac{e}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{e}{c}(\vec{V}\nabla)\vec{A} - \frac{e}{c}\left[\vec{V}\,rot\vec{A}\right] + e\nabla\varphi = 0$$

Обратим внимание, что слагаемое

$$-\frac{e}{c}(\vec{V}\nabla)\vec{A},$$

появившееся при взятии градиента, не компенсируется, так как мы оставили при вычислении производной обобщенного импульса только локальную производную.

Сила, действующая на заряд:

$$\vec{F} = -\frac{e}{c}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{e}{c}(\vec{V}\nabla)\vec{A} + \frac{e}{c}\left[\vec{V}\,rot\vec{A}\right] - e\nabla\varphi$$

Если подставить общепринятые выражения для электрического и магнитного поля, формула принимает такой вид:

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}(\vec{V}\nabla)\vec{A} + \frac{e}{c}\left[\vec{V}\,\vec{H}\right]$$

От известной формулы силы Лоренца данную силу отличает второе слагаемое. Когда оно равно нулю? Когда векторный потенциал не изменяется вдоль направления скорости частицы (на которую он воздействует). Именно такой случай реализуется, в частности, при протекании тока по двум прямолинейным параллельным проводам.

На этом я заканчиваю изложение своей попытки модифицировать силу Лоренца. Жду откликов от интересующихся этой проблемой.

Список литературы:

1) Фейнман, Лейтон, Сэндс «Фейнмановские лекции по физике» Т.6, М. «Мир» 1977
2) Тамм И.Е. «Основы теории электричества», М. “Наука” 1973.
3) Голдстейн Г. «Классическая механика», М. «Наука» 1975
4) Лойцянский, Лурье «Курс теоретической механики» Т.1, М. «Наука» 1982
5) Матвеев А.Н. «Механика и теория относительности», М 2003
6) Ландау, Лифшиц «Механика», М. «Наука» 1988
7) Ландау, Лифшиц «Теория поля», М. «Наука» 1967
8) Китаев А.Е. статья «Некоторые вопросы квантовой механики (3 письма)», размещена на сайте kitaev-nn.narod.ru
9) Уиттекер Э. «История теории эфира и электричества», Москва-Ижевск 2001