

Дальнейшее исследование применимости измененных уравнений Лагранжа к системам с диссипацией.

Здесь я продолжу исследования, начатые в предыдущих статьях («Применение измененных уравнений Гамильтона и Лагранжа к уравнению Ван-дерПоля» и «Новый вариант вариационной задачи»), и выведу соотношение для изменения энергии, применимое не только к одномерному случаю, но и к случаю большего количества координат.

Выпишу предлагаемую функцию Лагранжа:

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - u(\vec{r}) + \vec{f}(r)\dot{\vec{r}} \quad (1)$$

Я напомним (на всякий случай) измененные уравнения Лагранжа:

$$\frac{\tilde{d}}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \right) = 0$$

«Изменение» сводится к одной небольшой детали – полная производная по времени заменяется на специфическую производную, обозначенную знаком «тильда» (сверху над d). Формула для этой производной будет уточнена ниже (см.(2)).

Приступим теперь к выводу. Запишем полную производную по времени от функции Лагранжа (предполагаем, что явной зависимости от времени у потенциалов u и \vec{f} нет).

$$\frac{d}{dt} L = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} \frac{d\dot{\vec{v}}}{dt}$$

Градиент лагранжиана по пространственным координатам выразим через измененные уравнения Лагранжа.

$$\frac{d}{dt} L = \frac{\tilde{d}\vec{R}}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} \frac{d\dot{\vec{v}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} L = \frac{\tilde{d} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} \right)}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} \frac{d\dot{\vec{v}}}{dt}$$

Расшифруем выражение для производной, входящей в измененные уравнения Лагранжа (которая обозначена значком «тильда»):

$$\frac{\tilde{d} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} \right)}{dt} = \frac{d \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} \right)}{dt} - \left(\vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} \right) \quad (2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L &= \left[\frac{d \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} \right)}{dt} - \left(\vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} \right) \right] \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} \frac{d\dot{\vec{v}}}{dt} = \\ &= \frac{d(\vec{R})}{dt} \vec{v} - \left\{ \left(\vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{R} \right\} \vec{v} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} \frac{d\dot{\vec{v}}}{dt} \end{aligned}$$

Сравним теперь все это с таким выражением:

$$\frac{d}{dt} (\vec{v}\vec{R}) - \vec{v} \left\{ \left(\vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} \right) \right\} = \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{R} + \vec{v} \frac{d\vec{R}}{dt} - \left\{ \left(\vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{R} \right\} \vec{v}$$

Видно, что

$$\frac{d}{dt} L = \frac{d}{dt} (\vec{v}\vec{R}) - \left\{ \left(\vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{R} \right\} \vec{v}$$

Значит

$$\frac{d}{dt} (L - \vec{v}\vec{R}) = - \left\{ \left(\vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{R} \right\} \vec{v}$$

Слева стоит полная производная по времени от энергии (взятая с отрицательным знаком). Изменим знак и получим окончательное выражение:

$$\frac{d}{dt} E = \left\{ \left(\vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{R} \right\} \vec{v} = \vec{v} \{ (\vec{v} \text{ grad}) \vec{R} \}$$

Можно записать и так (учитывая, что $\text{grad } \vec{R}$ является тензором):

$$\frac{d}{dt} E = \vec{v} ((\text{grad } \vec{R}) \vec{v}) \quad (3)$$

Здесь произведение тензора на вектор скорости справа понимается как матричное. Получивший вектор потом скалярно умножается на вектор скорости, стоящий слева.

Обратим также внимание, что лагранжиан (1) фактически совпадает с лагранжианом для движения частицы в электромагнитном поле (если заменить вектор \vec{f} на векторный потенциал \vec{A} , умноженный на $\frac{e}{c}$). Это дает основание предположить, что магнитное поле при движении в нем заряженной частицы может играть диссипационную роль.

В заключение статьи попробуем применить измененные уравнения Лагранжа к системе, описываемой известным в теории колебаний уравнением Рэля.

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} - \left(1 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (4)$$

Мне пришлось предпринять некоторый «обходной» маневр – свести уравнение Рэля к уравнению Ван-дер-Поля (попробуйте, может у вас выйдет и напрямую). Если продифференцировать уравнение Рэля по времени и положить

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

получится следующая система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \mu \frac{d^2 y}{dt^2} - (1 - 3y^2) \frac{dy}{dt} + y = 0 \end{cases}$$

Или, если продифференцировать также и первое уравнение,

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} \\ \mu \frac{d^2 y}{dt^2} - (1 - 3y^2) \frac{dy}{dt} + y = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Второе из этих уравнений, как видно, сводится к уравнению Ван-дер-Поля. Первое же фактически является уравнением движения материальной точки под влиянием «отрицательного» трения.

Если взять следующую функцию Лагранжа

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \mu \frac{\dot{y}^2}{2} + \dot{y}(y - y^3) + \dot{y}x - \frac{y^2}{2},$$

мы получим в точности систему (5). Только уравнения Лагранжа используйте не обычные, а измененные (см. начало статьи).

Мгновенная скорость изменения энергии получается равной

$$\dot{y}(\dot{x} + \dot{y}(1 - 3y^2))$$

Это соотношение получено с помощью формулы (3).

Список литературы:

- 1) Голдстейн «Классическая механика», М. «Наука» 1975
- 2) Ландау, Лифшиц «Механика», М. «Наука» 1988
- 3) Рабинович М.И., Трубецков Д.И. «Введение в теорию колебаний и волн», М. «Наука» 1984