Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Дальнейшее исследование применимости измененных уравнений Лагранжа к системам с диссипацией.

Здесь я продолжу исследования, начатые в предыдущих статьях («Применение измененных уравнений Гамильтона и Лагранжа к уравнению Ван-дерПоля» и «Новый вариант вариационной задачи»), и выведу соотношение для изменения энергии, применимое не только к одномерному случаю, но и к случаю большего количества координат.

Выпишу предлагаемую функцию Лагранжа:

$$L=\frac{m\dot{\vec{r}}^{2}}{2}-u(\vec{r})+\vec{f}(r)\dot{\vec{r}} \qquad (1)$$

Я напомню (на всякий случай) измененные уравнения Лагранжа:

$$\frac{\tilde{d}}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\vec{v}})-(\frac{\partial L}{\partial\vec{r}})=0$$

«Изменение» сводится к одной небольшой детали – полная производная по времени заменяется на специфическую производную, обозначенную знаком «тильда» (сверху над d). Формула для этой производной будет уточнена ниже (см.(2)).

Приступим теперь к выводу. Запишем полную производную по времени от функции Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}L=\frac{\partial L}{\partial\vec{r}}\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Градиент лагранжиана по пространственным координатам выразим через измененные уравнения Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}L=\frac{\tilde{d}\vec{R}}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}L=\frac{\tilde{d}(\frac{\partial L}{\partial\vec{v}})}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Расшифруем выражение для производной, входящей в измененные уравнения Лагранжа (которая обозначена значком «тильда»):

$$\frac{\tilde{d}(\frac{\partial L}{\partial\vec{v}})}{dt}=\frac{d(\frac{\partial L}{\partial\vec{v}})}{dt}-(\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})(\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}) \qquad (2)$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}L=[\frac{d(\frac{\partial L}{\partial\vec{v}})}{dt}-(\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})(\frac{\partial L}{\partial\vec{v}})]\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}\frac{d\vec{v}}{dt}=$$

$$=\frac{d(\vec{R})}{dt}\vec{v}-\{(\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})\vec{R}\}\vec{v}+\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Сравним теперь все это с таким выражением:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\vec{R})-\vec{v}\{(\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})(\frac{\partial L}{\partial\vec{v}})\}=\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{R}+\vec{v}\frac{d\vec{R}}{dt}-\{(\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})\vec{R}\}\vec{v}$$

Видно, что

$$\frac{d}{dt}L=\frac{d}{dt}(\vec{v}\vec{R})-\{(\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})\vec{R}\}\vec{v}$$

Значит

$$\frac{d}{dt}(L-\vec{v}\vec{R})=-\{(\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})\vec{R}\}\vec{v}$$

Слева стоит полная производная по времени от энергии (взятая с отрицательным знаком). Изменим знак и получим окончательное выражение:

$$\frac{d}{dt}E=\{(\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})\vec{R}\}\vec{v}=\vec{v}\{(\vec{v}\ grad)\vec{R}\}$$

Можно записать и так (учитывая, что $grad\ \vec{R}$ является тензором):

$$\frac{d}{dt}E=\vec{v}((grad\ \vec{R})\vec{v}) \qquad (3)$$

Здесь произведение тензора на вектор скорости справа понимается как матричное. Получивший вектор потом скалярно умножается на вектор скорости, стоящий слева.

Обратим также внимание, что лагранжиан (1) фактически совпадает с лагранжианом для движения частицы в электромагнитном поле (если заменить вектор $\vec{f}$ на векторный потенциал $\vec{A}$, умноженный на $\frac{e}{c}$). Это дает основание предположить, что магнитное поле при движении в нем заряженной частицы может играть диссипационную роль.

В заключение статьи попробуем применить измененные уравнения Лагранжа к системе, описываемой известным в теории колебаний уравнением Рэлея.

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2}-(1-(\frac{dx}{dt})^2)\frac{dx}{dt}+x=0 \qquad (4)$$

Мне пришлось предпринять некоторый «обходной» маневр – свести уравнение Рэлея к уравнению Ван-дер-Поля (попробуйте, может у вас выйдет и напрямую). Если продифференцировать уравнение Рэлея по времени и положить

$$\frac{dx}{dt}=y\,,$$

получится следующая система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \mu\dfrac{d^2y}{dt^2}-(1-3y^2)\dfrac{dy}{dt}+y=0\end{cases}$$

Или, если продифференцировать также и первое уравнение,

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{dy}{dt}\\ \mu\dfrac{d^2y}{dt^2}-(1-3y^2)\dfrac{dy}{dt}+y=0\end{cases} \qquad (5)$$

Второе из этих уравнений, как видно, сводится к уравнению Ван-дер-Поля. Первое же фактически является уравнением движения материальной точки под влиянием «отрицательного» трения.

Если взять следующую функцию Лагранжа

$$L=\frac{\dot{x}^2}{2}+\mu\frac{\dot{y}^2}{2}+\dot{y}(y-y^3)+\dot{y}x-\frac{y^2}{2}\,,$$

мы получим в точности систему (5). Только уравнения Лагранжа используйте не обычные, а измененные (см. начало статьи).

Мгновенная скорость изменения энергии получается равной

$\dot{y}(\dot{x}+\dot{y}(1-3y^2))$

Это соотношение получено с помощью формулы (3).

Список литературы:

1) Голдстейн «Классическая механика», М. «Наука» 1975
2) Ландау, Лифшиц «Механика», М. «Наука» 1988
3) Рабинович М.И., Трубецков Д.И. «Введение в теорию колебаний и волн», М. «Наука» 1984