Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Переход от диссипации к индукции.

Ранее мной уже была предложена формула для скорости изменения энергии диссипативных систем. Ее вывод был проведен для случая потенциалов, не зависящих от времени. Для учета возможной явной зависимости их от времени нужно внести в этот вывод совсем небольшие изменения. Я, тем не менее, проделаю здесь все выкладки заново.

Напомню функцию Лагранжа для системы:

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - u(\vec{r}) + \vec{f}(r)\dot{\vec{r}} \qquad (1)$$

Здесь потенциалы u и f будем считать зависящими от времени.

Дифференциальные уравнения движения получаются с помощью «измененных» уравнений Лагранжа:

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\right) = 0$$

«Изменение» сводится к небольшой детали – полная производная по времени заменяется на специфическую производную, обозначенную значком «тильда» (сверху над d):

$$\frac{\tilde{d}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)}{dt} - \left(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) \qquad (2)$$

Приступим теперь к выводу. Запишем полную производную по времени от функции Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}L = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Именно наличием частной производной от времени это соотношение отличается от аналогичного в статье «Дальнейшее исследование применимости измененных уравнений Лагранжа к системам с диссипацией» (там предполагалось отсутствие у лагранжиана явной зависимости от времени).

Градиент лагранжиана по пространственным координатам выразим через измененные уравнения Лагранжа (а частную производную по времени перенесем в левую часть).

$$\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\tilde{d}\vec{R}}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\tilde{d}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Расшифруем выражение для производной, обозначенной значком «тильда» (для этого снова выпишем формулу (2)):

$$\frac{\tilde{d}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)}{dt} - \left(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)$$

С учетом этого

$$\frac{d}{dt}L-\frac{\partial L}{\partial t}=[\frac{d(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}})}{dt}-(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}})(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}})]\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\frac{d\vec{v}}{dt}=$$
$$=\frac{d(\vec{R})}{dt}\vec{v}-\{(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}})\vec{R}\}\vec{v}+\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Сравним теперь все это с таким выражением:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\vec{R})-\vec{v}\{(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}})(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}})\}=\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{R}+\vec{v}\frac{d\vec{R}}{dt}-\{(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}})\vec{R}\}\vec{v}$$

Видно, что

$$\frac{d}{dt}L-\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{d}{dt}(\vec{v}\vec{R})-\{(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}})\vec{R}\}\vec{v}$$

Значит

$$\frac{d}{dt}(L-\vec{v}\vec{R})-\frac{\partial L}{\partial t}=-\{(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}})\vec{R}\}\vec{v}$$

Слева стоит полная производная по времени от энергии (взятая с отрицательным знаком). Изменим знак и получим окончательное выражение:

$$\frac{d}{dt}E+\frac{\partial L}{\partial t}=\{(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}})\vec{R}\}\vec{v}=\vec{v}\{(\vec{v}\ grad)\vec{R}\}$$

Или

$$\frac{d}{dt}E=\{(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}})\vec{R}\}\vec{v}-\frac{\partial L}{\partial t}=\vec{v}\{(\vec{v}\ grad)\vec{R}\}-\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (3)$$

С учетом выражения для лагранжиана (1) получим:

$$\frac{d}{dt}E=\vec{v}\{(\vec{v}\ grad)\vec{R}\}-\vec{v}\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (4)$$

Можно найти не только изменение энергии за единицу времени, но и изменение энергии при прохождении частицей некоторого направленного отрезка своей траектории. Для этого запишем скорость как производную:

$$\frac{d}{dt}E=\frac{d\vec{l}}{dt}\{(\frac{d\vec{l}}{dt}\ grad)\vec{R}-\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\}+\frac{\partial u}{\partial t}$$

Далее будем считать, что потенциал u не зависит от времени (нас в данной статье больше интересует зависимость от времени потенциала f). Из предыдущей формулы тогда следует такое соотношение для изменения энергии:

$$dE=d\vec{l}\{(\frac{d\vec{l}}{dt}\ grad)\vec{R}-\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\} \qquad (5)$$

Учтем, что

$$\vec{R}=m\vec{v}+\vec{f}$$

(см. выражение (1) для лагранжиана).

С учетом этого формула (5) принимает вид

$$dE=d\vec{l}\{(\vec{v}\ grad)\vec{f}-\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\}$$

Величину в фигурных скобках можно записать через полную производную:

$$-\frac{d\vec{f}}{dt}$$

При этом системой отсчета с независимыми пространственными координатами нужно считать движущуюся систему отсчета, связанную с самой частицей

Двинемся дальше. При использовании уравнений Лагранжа (и обычных, и измененных), приходится брать градиент от скалярного произведения скорости на величину f (причем скорость считается не зависящей от пространственных координат).

$$grad(\vec{V}\,\vec{f}\,) = \nabla(\vec{V}\,\vec{f}\,) = (\vec{V}\nabla)\,\vec{f} + [\vec{V}\,rot\,\vec{f}\,]$$

Отсюда

$$(\vec{V}\;grad)\,\vec{f} = (\vec{V}\nabla)\,\vec{f} = grad(\vec{V}\,\vec{f}\,) - [\vec{V}\,rot\,\vec{f}\,]$$

Подставляя все это в (5), получим:

$$dE = d\vec{l}\,\{grad(\vec{v}\,\vec{f}\,) - [\vec{v}\,rot\,\vec{f}\,] - \frac{\partial\vec{f}}{\partial t}\} \qquad (6)$$

Теперь от рассмотрения одной движущейся частицы перейдем к рассмотрению «коллектива» частиц, находящихся в разных точках пространства. Каждая из частиц имеет в момент времени t свою скорость (то-есть скорость в этом месте начинаем считать функцией пространственных координат). Просуммируем формулу (6) по множеству таких точек. Разумно считать, что все эти многочисленные точки лежат на некотором контуре, и от дискретного суммирования перейти к интегрированию.

Этот контур может быть как неподвижным, так и движущимся (все равно в момент времени t , в который мы мгновенно производим интегрирование, он является как бы застывшим).

Проведем интегрирование.

$$E = \oint_L grad(\vec{v}\,\vec{f}\,)d\vec{l} - \oint_L [\vec{v}\,rot\,\vec{f}\,]d\vec{l} - \oint_L \frac{\partial\vec{f}}{\partial t}d\vec{l}$$

Первый интеграл в правой части равен нулю. Третий можно заменить на интеграл по площади (охватываемой этим контуром). Результат подобного интегрирования можно считать изменением энергии частицы после прохода по замкнутому контуру.

$$E = \oint_L [rot\,\vec{f}\,\vec{v}\,]d\vec{l} - \int_S \frac{\partial(rot\,\vec{f}\,)}{\partial t}d\vec{S}$$

Вам ничего не напоминает это выражение? Приглядимся - если заменить вектор $\vec{f}$ на векторный потенциал $\vec{A}$, умноженный на $\frac{1}{c}$, то получится закон электромагнитной индукции. Аналогичное выражение приведено, например, в книге [3] как «наиболее общая форма закона индукции». Правда, там под скоростью v подразумевается не скорость частиц, а «скорость движения линейного элемента ограничивающего контура». Обычно в книгах по электричеству подобные выражения записывают как результат дифференцирования по времени магнитного потока через некоторый замкнутый контур (возможно, подвижный).

Отметим, что нам не потребовалось прибегать к понятию «вихревого электрического поля». Все индукционные эффекты объяснены взаимодействием частиц с векторным потенциалом. Но не с помощью обычных, а с помощью «измененных» уравнений Лагранжа (пользуясь ими, мы придем к закону для силы, отличному от Лоренцевского).

Список литературы:

1) Голдстейн «Классическая механика», М. «Наука» 1975
2) Ландау, Лифшиц «Теория поля», М. «Наука» 1967
3) Поль «Учение об электричестве», М. «ГИФМЛ» 1962
4) Тамм И.Е. «Основы теории электричества», М. “Наука” 1973.