Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Применение измененных уравнений Гамильтона и Лагранжа к диссипативным системам.

В одной из предыдущих работ мной было предложено небольшое обобщение лагранжевой и гамильтоновой механики, применимое для диссипативных систем. Здесь я испытаю этот подход для систем, более общих, чем приведенный в той работе пример линейного осциллятора с затуханием.

Рассмотрим такой лагранжиан

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{kr^2}{2} + f(r)\dot{r}$$

Здесь f – некоторая функция пространственной координаты.

Запишем обобщенный импульс:

$$R = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} + f(r)$$

Выразим скорость через импульс

$$v = \dot{r} = \frac{R}{m} - \frac{f}{m}$$

Попробуем теперь получить функцию Гамильтона (гамильтониан):

$$H = Rv - L = R(\frac{R}{m} - \frac{f}{m}) - \frac{m}{2}(\frac{R}{m} - \frac{f}{m})^2 + \frac{kr^2}{2} - f(\frac{R}{m} - \frac{f}{m}) =$$

$$= \frac{(R-f)^2}{2m} + \frac{kr^2}{2}$$

Используем теперь уравнения Лагранжа, немного измененные, как описано в вышеупомянутой статье:

$$\frac{\tilde{d}}{dt}(\frac{\partial L(t,\vec{r},\dot{\vec{r}})}{\partial \dot{\vec{r}}}) - \frac{\partial L(t,\vec{r},\dot{\vec{r}})}{\partial \vec{r}} = 0$$

Это изменение сводится к тому, что от обобщенного импульса берется не полная производная по времени, а производная, выражаемая такой формулой

$$\frac{\tilde{d}}{dt}(...) = \frac{d}{dt}(...) - \frac{\partial(...)}{\partial \vec{r}}\vec{v}$$

Видно, что обозначенная значком «тильда» производная не действует на пространственные координаты.

Используем все это для приведенного выше лагранжиана (одномерного). Вычислим сперва первое слагаемое:

$$\frac{\tilde{d}}{dt}R = m\ddot{r}$$

Но не

$$\dot{R} = m\ddot{r} + f_r\frac{dr}{dt},$$

как было бы в случае обычного уравнения Лагранжа!

Далее вычислим 2-е слагаемое и запишем все уравнение целиком:

$$m\ddot{r} + kr - \dot{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r} = 0$$

Если

$$f(r) = \gamma r - Br^3,$$

получается такое дифференциальное уравнение

$$m\ddot{r} + kr - \dot{r}(\gamma - 3Br^2) = 0,$$

которое можно свести к уравнению Ван-дер-Поля (описывающему генератор автоколебаний). Заметим также, что если параметр B равен нулю, а параметр γ отрицательный, мы имеем уравнение затухающего осциллятора.

Испытаем теперь гамильтонов подход. Аналог уравнений Гамильтона такой (для одномерного случая):

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial R} \\ \dfrac{\tilde{d}}{dt} R = -\dfrac{\partial H}{\partial r} \end{cases}$$

Отличие от обычных уравнений Гамильтона – в той же самой производной по времени, обозначенной значком «тильда».

Подставим в уравнения нашу функцию Гамильтона.

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{R - f}{m} \\ \dfrac{\tilde{d}}{dt} R = -\dfrac{R - f}{m}\left(-\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) - kr \end{cases}$$

Продифференцируем 1-е уравнение по времени:

$$\ddot{r} = \frac{\dot{R}}{m} - \frac{1}{m} f_r v$$

Подставим туда полную производную по времени от обобщенного импульса (R с точкой), взятую из второго уравнения

$$\frac{\tilde{d}}{dt} R = \dot{R} - v f_r = -\frac{R - f}{m}(-f_r) - kr$$

$$\dot{R} = \frac{R - f}{m} f_r - kr + v f_r$$

Учтем зависимость R от скорости

$$\dot{R} = v f_r + \frac{(mv + f) - f}{m} f_r - kr$$

$$\dot{R} = v f_r + v f_r + \frac{f f_r}{m} - \frac{f f_r}{m} - kr = 2 v f_r - kr$$

И, наконец, подставим

$$\ddot{r} = \frac{\dot{R}}{m} - \frac{1}{m} f_r v = \frac{2 v f_r - kr}{m} - \frac{1}{m} f_r v$$

$$\ddot{r} = \frac{f_r v}{m} - \frac{k}{m} r$$

$$\ddot{r} + \frac{k}{m} r - \frac{f_r}{m} \dot{r} = 0$$

Получился тот же результат, что и для подхода Лагранжа.

Попробуем теперь выразить через лагранжиан изменение полной энергии системы. Сделаем это для одномерного случая (и для потенциалов, не зависящих явно от времени). Запишем полную производную по времени от функции Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}L = \frac{\partial L}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

Частную производную лагранжиана по пространственной координате выразим через обобщенное уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}L = \frac{\tilde{d}R}{dt}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}L = \frac{\tilde{d}(\frac{\partial L}{\partial v})}{dt}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

Учтем, что

$$\frac{\tilde{d}(\frac{\partial L}{\partial v})}{dt} = \frac{d(\frac{\partial L}{\partial v})}{dt} - (\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial L}{\partial v}))v$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}L = [\frac{d(\frac{\partial L}{\partial v})}{dt} - (\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial L}{\partial v}))v]\frac{dr}{dt} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dt} =$$

$$= \frac{d(R)}{dt}v - \frac{\partial}{\partial r}(R)v^2 + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

Сравним теперь все это с таким выражением:

$$\frac{d}{dt}(vR) - v^2\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial L}{\partial v}) = \frac{dv}{dt}R + v\frac{dR}{dt} - v^2\frac{\partial R}{\partial r}$$

Видно, что

$$\frac{d}{dt}L = \frac{d}{dt}(vR) - v^2\frac{\partial R}{\partial r}$$

Значит

$$\frac{d}{dt}(L - vR) = -v^2\frac{\partial R}{\partial r}$$

Слева стоит полная производная по времени от энергии (взятой с отрицательным знаком). Изменим знак:

$$\frac{d}{dt}E = v^2\frac{\partial R}{\partial r}$$

Для консервативных систем мы в результате аналогичного вывода получили бы ноль.

Учтем наше выражение для обобщенного импульса

$$\frac{d}{dt}E = v^2 f_r$$

Для уравнения, сводящегося к уравнению Ван-дер-Поля

$$\frac{d}{dt}E = v^2(\gamma - 3Br^2)$$

Если мы хотим найти амплитуду предельного цикла для этой системы, то хочется сразу приравнять полную производную нулю и тут же получить значение координаты r. Но, к сожалению, так делать нельзя, ведь в это соотношение входят мгновенные значения координаты и скорости. Для нахождения предельного цикла нам сперва нужно считать, что координата и скорость представляют собой синусоидальное колебание (такое предположение, вообще говоря, верно только для системы, близкой к линейному осциллятору, так что значения возмущающих параметров должны стремиться к нулю). И подставить соответствующие выражения в правую часть. После этого нужно усреднить по времени соотношение для производной энергии.

$$<\frac{d}{dt}E>=<v^2\gamma>-<v^2 3Br^2)>$$

После этого мы уже можем заменить левую часть нулем и найти амплитуду синусоидального предельного цикла, которая входит в правую часть.

Если мы сделаем собственную частоту равной 1, а коэффициент B равным 1/3, чтоб получить классический вид уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{r}+r-\dot{r}(\gamma-r^2)=0,$$

то амплитуда предельного цикла будет равна

$$2\sqrt{\gamma}$$

Это значение совпадает с полученным в книге [2] и вполне подтверждается численным экспериментом.

Список литературы:

1) Голдстейн «Классическая механика», М. «Наука» 1975
2) Берже, Помо, Видаль «Порядок в хаосе», М. «Мир» 1991
3) Ландау, Лифшиц «Механика», М. «Наука» 1988