Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Применение измененных уравнений Гамильтона и Лагранжа к диссипативным системам.

В одной из предыдущих работ мной было предложено небольшое обобщение лагранжевой и гамильтоновой механики, применимое для диссипативных систем. Здесь я испытаю этот подход для систем, более общих, чем приведенный в той работе пример линейного осциллятора с затуханием.

Рассмотрим такой лагранжиан

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{kr^2}{2} + f(r)\dot{r}$$

Здесь f – некоторая функция пространственной координаты.

Запишем обобщенный импульс:

$$R = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} + f(r)$$

Выразим скорость через импульс

$$v = \dot{r} = \frac{R}{m} - \frac{f}{m}$$

Попробуем теперь получить функцию Гамильтона (гамильтониан):

$$H = Rv - L = R(\frac{R}{m} - \frac{f}{m}) - \frac{m}{2}(\frac{R}{m} - \frac{f}{m})^2 + \frac{kr^2}{2} - f(\frac{R}{m} - \frac{f}{m}) =$$

$$= \frac{(R-f)^2}{2m} + \frac{kr^2}{2}$$

Используем теперь уравнения Лагранжа, немного измененные, как описано в вышеупомянутой статье:

$$\frac{\tilde{d}}{dt}(\frac{\partial L(t,\vec{r},\dot{\vec{r}})}{\partial \dot{\vec{r}}}) - \frac{\partial L(t,\vec{r},\dot{\vec{r}})}{\partial \vec{r}} = 0$$

Это изменение сводится к тому, что от обобщенного импульса берется не полная производная по времени, а производная, выражаемая такой формулой

$$\frac{\tilde{d}}{dt}(...) = \frac{d}{dt}(...) - \frac{\partial(...)}{\partial \vec{r}}\vec{v}$$

Видно, что обозначенная значком «тильда» производная не действует на пространственные координаты.

Используем все это для приведенного выше лагранжиана (одномерного). Вычислим сперва первое слагаемое:

$$\frac{\tilde{d}}{dt}R = m\ddot{r}$$

Но не

$$\dot{R} = m\ddot{r} + f_r\frac{dr}{dt},$$

как было бы в случае обычного уравнения Лагранжа!

Далее вычислим 2-е слагаемое и запишем все уравнение целиком:

$$m\ddot{r} + kr - \dot{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r} = 0$$

Если

$$f(r) = \gamma r - Br^3,$$

получается такое дифференциальное уравнение

$$m\ddot{r} + kr - \dot{r}(\gamma - 3Br^2) = 0,$$

которое можно свести к уравнению Ван-дер-Поля (описывающему генератор автоколебаний). Заметим также, что если параметр B равен нулю, а параметр γ отрицательный, мы имеем уравнение затухающего осциллятора.

Испытаем теперь гамильтонов подход. Аналог уравнений Гамильтона такой (для одномерного случая):

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial R} \\ \dfrac{\tilde{d}}{dt} R = -\dfrac{\partial H}{\partial r} \end{cases}$$

Отличие от обычных уравнений Гамильтона – в той же самой производной по времени, обозначенной значком «тильда».

Подставим в уравнения нашу функцию Гамильтона.

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{R - f}{m} \\ \dfrac{\tilde{d}}{dt} R = -\dfrac{R - f}{m}\left(-\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) - kr \end{cases}$$

Продифференцируем 1-е уравнение по времени:

$$\ddot{r} = \frac{\dot{R}}{m} - \frac{1}{m} f_r v$$

Подставим туда полную производную по времени от обобщенного импульса (R с точкой), взятую из второго уравнения

$$\frac{\tilde{d}}{dt} R = \dot{R} - vf_r = -\frac{R - f}{m}(-f_r) - kr$$

$$\dot{R} = \frac{R - f}{m} f_r - kr + vf_r$$

Учтем зависимость R от скорости

$$\dot{R} = vf_r + \frac{(mv + f) - f}{m} f_r - kr$$

$$\dot{R} = vf_r + vf_r + \frac{ff_r}{m} - \frac{ff_r}{m} - kr = 2vf_r - kr$$

И, наконец, подставим

$$\ddot{r} = \frac{\dot{R}}{m} - \frac{1}{m} f_r v = \frac{2vf_r - kr}{m} - \frac{1}{m} f_r v$$

$$\ddot{r} = \frac{f_r v}{m} - \frac{k}{m} r$$

$$\ddot{r} + \frac{k}{m} r - \frac{f_r}{m} \dot{r} = 0$$

Получился тот же результат, что и для подхода Лагранжа.

Попробуем теперь выразить через лагранжиан изменение полной энергии системы. Сделаем это для одномерного случая. Запишем полную производную по времени от функции Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}L = \frac{\partial L}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

Частную производную лагранжиана по пространственной координате выразим через обобщенное уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}L = \frac{\tilde{d}R}{dt}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}L = \frac{\tilde{d}(\frac{\partial L}{\partial v})}{dt}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

Учтем, что

$$\frac{\tilde{d}(\frac{\partial L}{\partial v})}{dt} = \frac{d(\frac{\partial L}{\partial v})}{dt} - (\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial L}{\partial v}))v$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}L = [\frac{d(\frac{\partial L}{\partial v})}{dt} - (\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial L}{\partial v}))v]\frac{dr}{dt} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dt} =$$

$$= \frac{d(R)}{dt}v - \frac{\partial}{\partial r}(R)v^2 + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

Сравним теперь все это с таким выражением:

$$\frac{d}{dt}(vR) - v^2\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial L}{\partial v}) = \frac{dv}{dt}R + v\frac{dR}{dt} - v^2\frac{\partial R}{\partial r}$$

Видно, что

$$\frac{d}{dt}L = \frac{d}{dt}(vR) - v^2\frac{\partial R}{\partial r}$$

Значит

$$\frac{d}{dt}(L - vR) = -v^2\frac{\partial R}{\partial r}$$

Слева стоит полная производная по времени от энергии (взятой с отрицательным знаком). Изменим знак:

$$\frac{d}{dt}E = v^2\frac{\partial R}{\partial r}$$

Для консервативных систем мы в результате аналогичного вывода получили бы ноль.

Учтем наше выражение для обобщенного импульса

$$\frac{d}{dt}E = v^2 f_r$$

Для уравнения, сводящегося к уравнению Ван-дер-Поля

$$\frac{d}{dt}E = v^2(\gamma - 3Br^2)$$

Если мы хотим найти амплитуду предельного цикла для этой системы, то хочется сразу приравнять полную производную нулю и тут же получить значение координаты r. Но, к сожалению, так делать нельзя, ведь в это соотношение входят мгновенные значения координаты и скорости. Для нахождения предельного цикла нам сперва нужно считать, что координата и скорость представляют собой синусоидальное колебание (такое предположение, вообще говоря, верно только для системы, близкой к линейному осциллятору, так что значения возмущающих параметров должны стремиться к нулю). И подставить соответствующие выражения в правую часть. После этого нужно усреднить по времени соотношение для производной энергии.

$$<\frac{d}{dt}E> = <v^2\gamma> - <v^2 3Br^2)>$$

После этого мы уже можем заменить левую часть нулем и найти амплитуду синусоидального предельного цикла, которая входит в правую часть.

Если мы сделаем собственную частоту равной 1, а коэффициент В равным 1/3, чтоб получить классический вид уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{r} + r - \dot{r}(\gamma - r^2) = 0,$$

то амплитуда предельного цикла будет равна

$$2\sqrt{\gamma}$$

Это значение совпадает с полученным в книге [2] и вполне подтверждается численным экспериментом.

Список литературы:

1) Голдстейн «Классическая механика», М. «Наука» 1975
2) Берже, Помо, Видаль «Порядок в хаосе», М. «Мир» 1991
3) Ландау, Лифшиц «Механика», М. «Наука» 1988