

Критические замечания к теории бетатрона.

В этой работе мы проведем теоретический анализ работы бетатрона. Довольно простые основы этой теории можно найти во многих книгах. Мы постараемся следовать книге известного автора Матвеева А.Н. [2] (правда, перейдя к гауссовой системе единиц).

Прежде всего запишем уравнение движения частицы в бетатроне

$$\frac{dp}{dt} = eE. \quad (1)$$

Если быть точным, то это есть проекция закона Ньютона на азимутальное направление цилиндрической системы координат (или на касательное направление к окружности, по которой движется частица - см. [3]). Что есть E ? Это напряженность вихревого электрического поля. Ее можно вычислить таким образом:

$$2\pi rE = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2)$$

Здесь r – это расстояние от места нахождения ускоряемой частицы до оси цилиндрической системы координат. Φ – это магнитный поток через площадь круга радиусом r – фактически через площадь, ограниченную орбитой частицы.

Отсюда

$$2\pi rE = -\frac{r}{2c} \frac{dB_a}{dt}. \quad (3)$$

Нижний индекс “ a ” означает усреднение. Обратим внимание – магнитный поток выражается через среднее поле. Усреднение происходит по площади, охватываемой орбитой частицы.

Итак, мы получили следующее уравнение движения по угловому направлению цилиндрической системы координат:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{er}{2c} \frac{dB_a}{dt}. \quad (4)$$

Проинтегрируем его.

$$p_1 - p_0 = -\frac{er}{2c} (B_{a1} - B_{a0}).$$

Для простоты будем считать, что в момент включения магнитного поля частица покоилась. Тогда

$$p(t) = -\frac{er}{2c} B_a(t).$$

Или, в нерелятивистском случае:

$$V(t) = -\frac{er}{2mc} B_a(t). \quad (5)$$

Нас для целей нашего изложения будет интересовать следующий вид временной зависимости индукции магнитного поля (фактически это бетатрон однократного действия).

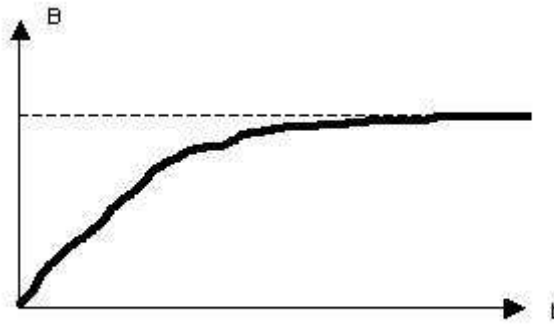


Рис.1

Начав увеличиваться от нуля, через некоторое время магнитное поле перестает изменяться. После того, как поле стало стационарным, выражение (5) также должно выполняться.

Далее в [2] приводится уравнение Ньютона для центростремительного ускорения (в режиме установившегося движения по окружности). Можно считать, что это есть радиальная проекция уравнения Ньютона в цилиндрической системе координат (радиальное ускорение, умноженное на массу, равняется радиальной магнитной силе Лоренца).

$$\frac{mV^2}{r} = -\frac{eVB}{c}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что

$$V(t) = -\frac{erB(t)}{mc}. \quad (7)$$

Ясно, что при выходе возрастающего магнитного поля на стационарное значение и вращение частицы в этом поле приобретет стационарный (установившийся) характер. Таким образом, мы получаем два соотношения ((5) и (7)), в одно из которых входит среднее по площади орбиты поле, а в другое – поле непосредственно на орбите. Отсюда получается известное бетатронное условие

$$B_a(t) = 2B(t). \quad (8)$$

Какие конкретные конфигурации удовлетворяют этому условию (и при каких r) – этот вопрос в [2,3] не обсуждается. Остается предположить, что если мы найдем поле, для которого это условие выполняется при некотором r (либо же при любых r), то траектория с этим радиусом в данном поле будет равновесной.

Но что будет, если магнитное поле сделать почти однородным? Тогда среднее поле будет почти равно локальному на орбите. Мы, сокращая индукцию магнитного поля, получим абсурдное равенство

$$1=2.$$

Получается, что бетатронное условие перестает выполняться? Но ясно, что ускоренный вихревым электрическим полем электрон будет вращаться и в однородном магнитном поле после его выхода на стационарный режим (кстати, временной промежуток возрастания магнитного поля можно сделать малым, так что воздействие электрического поля будет ударообразным). Есть ли какой-нибудь выход из этого противоречия? Да, есть. Силу в правой части соотношения (6) нужно взять в 2 раза меньшей.

В докладе на конференции РСПОВИ-2014 была выдвинута гипотеза о том, что движение заряженных частиц в магнитном поле может описываться не стандартными, а «модифицированными» уравнениями Лагранжа. Соответствующая сила определяется выражением

$$\vec{F} = -\frac{e}{c} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{e}{c} \nabla(\vec{V} \vec{A}), \quad (9)$$

которое выводится из этих уравнений. Пользуясь правилом векторного анализа

$$\nabla(\vec{C}\vec{A}) = (\vec{C}\nabla)\vec{A} + [\vec{C} \text{rot}\vec{A}],$$

это соотношение можно записать так:

$$\vec{F} = -\frac{e}{c} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{e}{c} (\vec{V}\nabla)\vec{A} + \frac{e}{c} [\vec{V} \text{rot}\vec{A}]. \quad (10)$$

Оказывается, что в однородном магнитном поле \vec{B}_0 , которое можно выразить через векторный потенциал следующего вида

$$\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{B}_0 \vec{r}], \quad (11)$$

второе слагаемое в формуле (10) равняется половине третьего слагаемого, взятого с противоположным знаком. То-есть учет второго слагаемого уменьшает стандартную силу Лоренца в два раза. И вместо циклотронной частоты частица в магнитном поле будет вращаться с «полуциклотронной» частотой (равной частоте Лармора – частоте прецессии магнитного момента заряженного тела в магнитном поле). Бетатронное условие заменяется на следующее, выполняющееся и в случае предельного перехода к однородному полю:

$$B_a(t) = B(t). \quad (12)$$

Ясно, что если поле однородное, то это условие будет выполняться при любом значении r .

Вывод: при конструировании бетатронов можно не добиваться резкого увеличения индукции магнитного поля в центральной части орбиты (что делается для выполнения бетатронного условия (8) – см., например, рис 7 в [4]). Хотя определенная неоднородность поля по радиальной координате должна присутствовать (см. следующее дальше «Добавление 1»).

ДОБАВЛЕНИЕ 1: В процессе обсуждения данной статьи с С.А.Семиковым (ННГУ им. Лобачевского) им был задан вполне резонный вопрос: если условие (8) неверно, то как же работают реальные бетатроны, основой для расчета которых послужила изложенная выше упрощенная теория (включающая в себя и формулу (8))? Ответить можно так: и если верна формула (8), и если верна формула (12), запуск электронов на равновесную траекторию, которую мы искали выше (посредством этих формул), с помощью источника, расположенного на этой же траектории, технически бессмысленен. После первого же оборота электрон столкнется с электронной пушкой (подробнее см. [4]). С технической точки зрения инженеров интересует создание некоторого подобия «потенциальной ямы» (зависящей от радиальной координаты). Пушка, находящаяся на краю этой ямы (не на равновесной траектории!), запускает электроны, которые будут колебаться внутри этой «ямы» (то-есть между некоторыми крайними значениями радиальной координаты – при этом ускоренно вращаясь!). И увеличение магнитного поля в центре системы как раз и направлено на создание подобной радиальной ловушки для частиц. Однородное поле для этой цели не подходит хотя бы потому, что в нем траектория с любым радиусом является равновесной, а электронная пушка (как уже сказано выше) не должна находиться на равновесной траектории.

ДОБАВЛЕНИЕ 2: Следует ожидать, что циклотрон (другой вид ускорителей заряженных частиц) будет работать не только на циклотронной частоте, но и на «полуциклотронной». Также интересно произвести проверку – не возникнет ли генерация на полуциклотронной частоте в мазерах на циклотронном резонансе.

Отметим тут же, что так называемые «полуциклотронные» резонансы в плазме были обнаружены уже довольно давно (этот вопрос обсуждается, например, в [5]).

ДОБАВЛЕНИЕ 3: В квазиоднородном изменяющемся во времени магнитном поле (например внутри соленоида) можно определять индуцируемое вихревое поле не по формуле (3), а с помощью выражения

$$\vec{E} = -\frac{1}{2c} \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{r} \right],$$

следующего из формулы (11).

Список литературы:

- 1) Китаев А.Е. «Модифицированные уравнения Лагранжа и Гамильтона в применении к диссипативным системам. Возможные следствия для теории электромагнетизма», РСПОВИ-2014. Сборник докладов. Н.Новгород. 2014.
- 2) Матвеев А.Н. «Электричество и магнетизм», М. «Высшая школа» 1983.
- 2) Фейнман, Лейтон, Сэндс «Фейнмановские лекции по физике» Т.6, М. «Мир» 1977.
- 4) А.П. Гринберг. Ускорение электронов с помощью электромагнитной индукции (бетатрон Керста). УФН, т. XXVII, вып.1, с. 31-71 (1945).
- 5) Киценко А. Б., Панкратов И. М., Степанов К. Н. Нелинейный циклотронный резонанс в плазме // ЖЭТФ. 1974 Т. 67 с. 1728.