Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

К движению электронов в поле векторного потенциала с азимутальной симметрией (сокращенный вариант).

Во многих технических устройствах используются электронные пучки, движущиеся в электрическом и магнитном полях. Часто эти поля обладают азимутальной (цилиндрической) симметрией. Для рассмотрения таких систем естественно использовать цилиндрическую систему координат. Мы здесь будем рассматривать лишь движение в магнитном поле. Если векторный потенциал имеет только азимутальную компоненту (зависящую от r и z, но не от угла), можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \dfrac{e}{mc}\dot{\varphi}A_\varphi + \dfrac{e}{mc}\dot{\varphi}r\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial r}, \\ \dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = -\dfrac{e}{mc}\dfrac{d}{dt}(rA_\varphi), \\ \ddot{z} = \dfrac{e}{mc}r\dot{\varphi}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial z}. \end{cases} \tag{1}$$

Аналогичные уравнения можно найти в книге [1]. Раскрывая полную производную по времени во втором уравнении этой системы, мы получим:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \dfrac{e}{mc}\dot{\varphi}A_\varphi + \dfrac{e}{mc}\dot{\varphi}r\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial r}, \\ r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} = -\dfrac{e}{mc}\dot{r}A_\varphi - \dfrac{e}{mc}r\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial t} - \dfrac{e}{mc}r\dot{r}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \dfrac{e}{mc}r\dot{z}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \\ \ddot{z} = \dfrac{e}{mc}r\dot{\varphi}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial z}. \end{cases} \tag{2}$$

Можно записать уравнения (2) и через индукцию магнитного поля:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \dfrac{e}{mc}\dot{\varphi}rB_z, \\ r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} = -\dfrac{e}{mc}r\dot{r}B_z + \dfrac{e}{mc}r\dot{z}B_r - \dfrac{e}{mc}r\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial t}, \\ \ddot{z} = -\dfrac{e}{mc}r\dot{\varphi}B_r. \end{cases} \tag{3}$$

Из второго (азимутального) уравнения движения получается [1, с 79] (при определенном выборе начальных условий) соотношение для производной по времени от азимутальной координаты (то-есть угла):

$$\dot{\varphi} = -\frac{e}{2mc}B_0(z). \tag{4}$$

Здесь B_0 – это индукция магнитного поля на самой оси z (см. [1], с 77). Данная производная является ничем иным, как угловой частотой вращения электрона в магнитном поле. Заметим - эта частота наполовину меньше, чем циклотронная частота. Налицо некоторая противоречивость результатов: ведь при решении уравнений движения в декартовых координатах (для простейшего случая – однородного поля) мы получаем вращение электрона с циклотронной частотой

$$\frac{eB}{mc}. \qquad (5)$$

Отметим, что формулу, аналогичную формуле (4), можно найти и в [2] (там вместо магнитного поля фигурирует магнитный поток).

Пусть азимутальная компонента векторного потенциала не зависит от времени, но зависит от z (и от r). И пусть частица влетает в такое поле, двигаясь строго вдоль оси z. Тогда, в соответствии со вторым уравнением системы (2), на частицу будет действовать азимутальная сила, изменяющая z-компоненту момента частицы. Но экспериментаторы знают, что в плавно изменяющихся полях действие этой силы незаметно. В обзоре [3] можно прочитать, что «закрутить первоначально прямолинейный пучок в слабонеоднородном поле нельзя». Автор объясняет это наличием адиабатического инварианта

$$\frac{mV_t^2}{2eB}$$

(здесь V_t – поперечная к оси z компонента скорости). Но использование адиабатических инвариантов не должно исправлять результаты, полученные прямым решением уравнений движения (но должно получать некоторые результаты более легким способом). В итоге, вследствие наличия этих противоречий, возникают сомнения в правильности уравнений (1), а также (2) и (3).

В докладе на конференции РСПОВИ-2014 [4] было выдвинуто предположение о том, что движение заряженных частиц в магнитном поле может описываться не стандартными, а «модифицированными» уравнениями Лагранжа. Соответствующая сила определяется выражением

$$\vec{F} = -\frac{e}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}(\vec{V}\nabla)\vec{A} + \frac{e}{c}\left[\vec{V}\, rot\vec{A}\right], \qquad (6)$$

которое выводится из этих уравнений. Это соотношение можно записать также с помощью полной производной по времени:

$$\vec{F} = -\frac{e}{c}\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{e}{c}\left[\vec{V}\, rot\vec{A}\right]. \qquad (7)$$

При этом системой отсчета с независимыми пространственными координатами считается система, скорость которой относительно лабораторной системы отсчета (именно в ней первоначально задано поле $\vec{A}$) равна скорости движущейся частицы. В этой новой системе отсчета частица в данный момент неподвижна. Если записать подробное выражение для полной производной величины $\vec{A}$, то скорость, входящая в ее «конвективную» часть, будет направлена противоположно скорости частицы (входящей в выражение (6)). Величину

$$-\frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}$$

можно считать «эффективным» электрическим полем.

Лагранжиан частицы в магнитном поле записывается в векторном виде так:

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{e}{c}\vec{A}\dot{\vec{r}}\ . \qquad (8)$$

Отметим важный момент, касающийся использования «модифицированных» уравнений Лагранжа. Если перейти к цилиндрическим координатам, считая векторный потенциал равным нулю, и записать лагранжиан в **координатном** виде

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2),$$

то для получения уравнений движения вполне достаточно стандартных уравнений Лагранжа. Хотя обобщенный импульс зависит от обобщенных координат. Вот вид соответствующего столбца (но не вектора!):

$$\begin{pmatrix} m\dot{r} \\ mr^2\dot{\varphi} \\ m\dot{z} \end{pmatrix}.$$

Когда же нужно применять «модифицированные» уравнения? Рецепт такой: нужно записывать лагранжиан в **векторном** виде (пример – формула (8)), и из такого вида записи делать вывод о том, зависит или не зависит от координат обобщенный импульс (в соответствии с этим возникает необходимость в использовании «конвективной» добавки, отличающей «модифицированные» уравнения от стандартных - см.[4]). Частный вывод (в заключение этого абзаца): мы убеждаемся, что «модифицированные» уравнения Лагранжа не вытесняют полностью стандартные, за стандартными уравнениями Лагранжа сохраняются свои области применения.

Для перевода уравнений (6) в цилиндрическую систему координат нам потребуется выражение для дифференциального оператора

$$(\vec{V}\nabla)\vec{A}$$

в этой системе координат (для его проекций на орты локального ортонормированного базиса соответствующей системы координат). В [5] можно найти следующую формулу (подразумевается, что первый вектор – постоянный):

$$\left[(\vec{V}\nabla)\vec{A}\right]_1 = \frac{V_1}{h_1}\frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} + \frac{V_2}{h_2}\frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + \frac{V_3}{h_3}\frac{\partial A_1}{\partial \xi_3} +$$

$$+\frac{\partial A_2}{h_1 h_2}\left[V_1\frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} - V_2\frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}\right] + \frac{\partial A_3}{h_1 h_3}\left[V_1\frac{\partial h_1}{\partial \xi_3} - V_3\frac{\partial h_3}{\partial \xi_1}\right].$$

Остальные компоненты, согласно [5], получаются круговой подстановкой индексов (здесь h_i – коэффициенты Ламе). Запишем их:

$$\left[(\vec{V}\nabla)\vec{A}\right]_2 = \frac{V_2}{h_2}\frac{\partial A_2}{\partial \xi_2} + \frac{V_3}{h_3}\frac{\partial A_2}{\partial \xi_3} + \frac{V_1}{h_1}\frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} +$$

$$+\frac{\partial A_3}{h_2 h_3}\left[V_2\frac{\partial h_2}{\partial \xi_3} - V_3\frac{\partial h_3}{\partial \xi_2}\right] + \frac{\partial A_1}{h_2 h_1}\left[V_2\frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} - V_1\frac{\partial h_1}{\partial \xi_2}\right],$$

$$\left[(\vec{V}\nabla)\vec{A}\right]_3 = \frac{V_3}{h_3}\frac{\partial A_3}{\partial \xi_3} + \frac{V_1}{h_1}\frac{\partial A_3}{\partial \xi_1} + \frac{V_2}{h_2}\frac{\partial A_3}{\partial \xi_2} +$$

$$+\frac{\partial A_1}{h_3 h_1}\left[V_3\frac{\partial h_3}{\partial \xi_1} - V_1\frac{\partial h_1}{\partial \xi_3}\right] + \frac{\partial A_2}{h_3 h_2}\left[V_3\frac{\partial h_3}{\partial \xi_2} - V_2\frac{\partial h_2}{\partial \xi_3}\right].$$

В цилиндрической системе координат для случая, когда есть лишь азимутальная компонента вектора $\vec{A}$ (зависящая от r и z), эти формулы приобретают следующий вид:

$$\left[(\vec{V}\nabla)\vec{A}\right]_r = -\frac{V_\varphi A_\varphi}{r},$$

$$\left[(\vec{V}\nabla)\vec{A}\right]_\varphi = V_z\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + V_r\frac{\partial A_\varphi}{\partial r},$$

$$\left[(\vec{V}\nabla)\vec{A}\right]_z = 0.$$

Учет этих членов приводит к компенсации ряда слагаемых, соответствующих силе Лоренца. Приведем окончательный результат вычислений вида уравнений (6) в цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \dfrac{e}{mc}\dot{\varphi} r \dfrac{\partial A_\varphi}{\partial r}, \\ r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} = -\dfrac{e}{mc}\dot{r}A_\varphi - \dfrac{e}{mc} r \dfrac{\partial A_\varphi}{\partial t}, \\ \ddot{z} = \dfrac{e}{mc} r\dot{\varphi}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial z}. \end{cases} \tag{9}$$

Таким образом, предполагается, что эта система более точно описывает физическую реальность, чем системы (1),(2) и (3).

Пусть

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left[\vec{B}_0\, \vec{r}\,\right]. \tag{10}$$

Здесь $\vec{B}_0$ - постоянный вектор. Ротор от такого векторного потенциала дает однородное магнитное поле (как раз $\vec{B}_0$). В цилиндрических координатах выражение для этого потенциала будет иметь вид

$$\vec{A} = \frac{r}{2}\left|\vec{B}_0\right|\vec{i}_\varphi$$

(если считать, что $\vec{B}_0$ направлен вдоль оси *z*). Таким образом,

$$A_\varphi = \frac{r}{2}\left|\vec{B}_0\right|.$$

Для случая установившегося движения по окружности (когда $\ddot{r} = 0, \quad \dot{r} = 0$) из первого уравнения приведенной выше системы (9) следует, что

$$\dot{\varphi} = -\frac{e}{2mc}B_0. \tag{11}$$

Таким образом, мы получаем вращение частицы с полуциклотронной частотой. Также имеется решение, соответствующее отсутствию вращения:

$$\dot{\varphi} = 0.$$

Второе же уравнение дает соотношение

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0,$$

то-есть мы получаем сохранение *z*-компоненты момента вращающейся частицы.

Список литературы:

1. Гапонов В.И. «Электроника» Том 1, М.: ГИФМЛ 1960.
2. Цимринг Ш.Е. «Введение в высокочастотную электронику и физику электронных пучков», Н. Новгород: ИПФ РАН 2012.
3 Мануилов В.Н. Электронные пучки для мазеров на циклотронном резонансе и лазеров на свободных электронах // Соросовский образовательный журнал, 2001, №10, с. 81-87.4)
4 Китаев А.Е. «Модифицированные уравнения Лагранжа и Гамильтона в применении к диссипативным системам. Возможные следствия для теории электромагнетизма», РСПОВИ-2014. Сборник докладов. Н.Новгород: 2014.
5 Морс Ф.М., Фешбах Г. «Методы теоретической физики» Том 1. М.: ИЛ, 1958.
6 Солунин А.М. О Ларморовой и циклотронной частотах //Математика и ее приложения: журнал Ивановского матем. общества 2009 вып.1(6). С.103-120.