Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

К движению электронов в поле векторного потенциала с азимутальной симметрией.

Во многих технических устройствах используются электронные пучки, движущиеся в электрическом и магнитном полях. Часто эти поля обладают азимутальной (цилиндрической) симметрией. Для рассмотрения таких систем естественно использовать цилиндрическую систему координат. Мы здесь будем рассматривать лишь движение в магнитном поле. Если векторный потенциал имеет только азимутальную компоненту (зависящую от r и z, но не от угла), можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \dfrac{e}{mc}\dot{\varphi}A_\varphi + \dfrac{e}{mc}\dot{\varphi}r\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial r}, \\ \dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = -\dfrac{e}{mc}\dfrac{d}{dt}(rA_\varphi), \\ \ddot{z} = \dfrac{e}{mc}r\dot{\varphi}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial z}. \end{cases} \tag{1}$$

Аналогичные уравнения можно найти в книге [1]. Раскрывая полную производную по времени во втором уравнении этой системы, мы получим:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \dfrac{e}{mc}\dot{\varphi}A_\varphi + \dfrac{e}{mc}\dot{\varphi}r\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial r}, \\ r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} = -\dfrac{e}{mc}\dot{r}A_\varphi - \dfrac{e}{mc}r\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial t} - \dfrac{e}{mc}r\dot{r}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \dfrac{e}{mc}r\dot{z}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \\ \ddot{z} = \dfrac{e}{mc}r\dot{\varphi}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial z}. \end{cases} \tag{2}$$

Можно записать уравнения (2) и через индукцию магнитного поля:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \dfrac{e}{mc}\dot{\varphi}rB_z, \\ r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} = -\dfrac{e}{mc}r\dot{r}B_z + \dfrac{e}{mc}r\dot{z}B_r - \dfrac{e}{mc}r\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial t}, \\ \ddot{z} = -\dfrac{e}{mc}r\dot{\varphi}B_r. \end{cases} \tag{3}$$

Из второго (азимутального) уравнения движения получается [1, с 79] (при определенном выборе начальных условий) соотношение для производной по времени от азимутальной координаты (то-есть угла):

$$\dot{\varphi} = -\frac{e}{2mc}B_0(z). \tag{4}$$

Здесь B_0 – это индукция магнитного поля на самой оси z (см. [1], с 77). Данная производная является ничем иным, как угловой частотой вращения электрона в магнитном поле. Заметим - эта частота наполовину меньше, чем циклотронная частота. Налицо некоторая противоречивость результатов: ведь при решении уравнений движения в декартовых координатах (для простейшего случая – однородного поля) мы получаем вращение электрона с циклотронной частотой

$$\frac{eB}{mc}. \tag{5}$$

Отметим, что формулу, аналогичную формуле (4), можно найти и в [2] (там вместо магнитного поля фигурирует магнитный поток).

Пусть азимутальная компонента векторного потенциала не зависит от времени, но зависит от z (и от r). И пусть частица влетает в такое поле, двигаясь строго вдоль оси z. Тогда, в соответствии со вторым уравнением системы (2), на частицу будет действовать азимутальная сила, изменяющая z-компоненту момента частицы. Но экспериментаторы знают, что в плавно изменяющихся полях действие этой силы незаметно. В обзоре [3] можно прочитать, что «закрутить первоначально прямолинейный пучок в слабонеоднородном поле нельзя». Автор объясняет это наличием адиабатического инварианта

$$\frac{mV_t^2}{2eB}$$

(здесь V_t – поперечная к оси z компонента скорости). Но использование адиабатических инвариантов не должно исправлять результаты, полученные прямым решением уравнений движения (но должно получать некоторые результаты более легким способом). В итоге, вследствие наличия этих противоречий, возникают сомнения в правильности уравнений (1), а также (2) и (3).

В докладе на конференции РСПОВИ-2014 [4] было выдвинуто предположение о том, что движение заряженных частиц в магнитном поле может описываться не стандартными, а «модифицированными» уравнениями Лагранжа. Соответствующая сила определяется выражением

$$\vec{F} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}(\vec{V}\nabla)\vec{A} + \frac{e}{c}\left[\vec{V}\, rot\vec{A}\right], \tag{6}$$

которое выводится из этих уравнений. Это соотношение можно записать также с помощью полной производной по времени:

$$\vec{F} = -\frac{e}{c}\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{e}{c}\left[\vec{V}\, rot\vec{A}\right]. \tag{7}$$

При этом системой отсчета с независимыми пространственными координатами считается система, скорость которой относительно лабораторной системы отсчета (именно в ней первоначально задано поле $\vec{A}$) равна скорости движущейся частицы. В этой новой системе отсчета частица в данный момент неподвижна. Если записать подробное выражение для полной производной величины $\vec{A}$, то скорость, входящая в ее «конвективную» часть, будет направлена противоположно скорости частицы (входящей в выражение (6)). Величину

$$-\frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}$$

можно считать «эффективным» электрическим полем.

Лагранжиан частицы в магнитном поле записывается в векторном виде так:

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{e}{c}\vec{A}\dot{\vec{r}}\ . \tag{8}$$

Отметим важный момент, касающийся использования «модифицированных» уравнений Лагранжа. Если перейти к цилиндрическим координатам, считая векторный потенциал равным нулю, и записать лагранжиан в **координатном** виде

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2),$$

то для получения уравнений движения вполне достаточно стандартных уравнений Лагранжа. Хотя обобщенный импульс зависит от обобщенных координат. Вот вид соответствующего столбца (но не вектора!):

$$\begin{pmatrix} m\dot{r} \\ mr^2\dot{\varphi} \\ m\dot{z} \end{pmatrix}.$$

Когда же нужно применять «модифицированные» уравнения? Рецепт такой: нужно записывать лагранжиан в **векторном** виде (пример – формула (8)), и из такого вида записи делать вывод о том, зависит или не зависит от координат обобщенный импульс (в соответствии с этим возникает необходимость в использовании «конвективной» добавки, отличающей «модифицированные» уравнения от стандартных - см.[4]). Частный вывод (в заключение этого абзаца): мы убеждаемся, что «модифицированные» уравнения Лагранжа не вытесняют полностью стандартные, за стандартными уравнениями Лагранжа сохраняются свои области применения.

Для перевода уравнений (6) в цилиндрическую систему координат нам потребуется выражение для дифференциального оператора

$$(\vec{V}\nabla)\vec{A}$$

в этой системе координат (для его проекций на орты локального ортонормированного базиса соответствующей системы координат). В [5] можно найти следующую формулу (подразумевается, что первый вектор – постоянный):

$$\left[(\vec{V}\nabla)\vec{A}\right]_1 = \frac{V_1}{h_1}\frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} + \frac{V_2}{h_2}\frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + \frac{V_3}{h_3}\frac{\partial A_1}{\partial \xi_3} +$$

$$+\frac{\partial A_2}{h_1 h_2}\left[V_1\frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} - V_2\frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}\right] + \frac{\partial A_3}{h_1 h_3}\left[V_1\frac{\partial h_1}{\partial \xi_3} - V_3\frac{\partial h_3}{\partial \xi_1}\right].$$

Остальные компоненты, согласно [5], получаются круговой подстановкой индексов (здесь h_i – коэффициенты Ламе). Запишем их:

$$\left[(\vec{V}\nabla)\vec{A}\right]_2 = \frac{V_2}{h_2}\frac{\partial A_2}{\partial \xi_2} + \frac{V_3}{h_3}\frac{\partial A_2}{\partial \xi_3} + \frac{V_1}{h_1}\frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} +$$

$$+\frac{\partial A_3}{h_2 h_3}\left[V_2\frac{\partial h_2}{\partial \xi_3} - V_3\frac{\partial h_3}{\partial \xi_2}\right] + \frac{\partial A_1}{h_2 h_1}\left[V_2\frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} - V_1\frac{\partial h_1}{\partial \xi_2}\right],$$

$$\left[(\vec{V}\nabla)\vec{A}\right]_3 = \frac{V_3}{h_3}\frac{\partial A_3}{\partial \xi_3} + \frac{V_1}{h_1}\frac{\partial A_3}{\partial \xi_1} + \frac{V_2}{h_2}\frac{\partial A_3}{\partial \xi_2} +$$

$$+\frac{\partial A_1}{h_3 h_1}\left[V_3\frac{\partial h_3}{\partial \xi_1} - V_1\frac{\partial h_1}{\partial \xi_3}\right] + \frac{\partial A_2}{h_3 h_2}\left[V_3\frac{\partial h_3}{\partial \xi_2} - V_2\frac{\partial h_2}{\partial \xi_3}\right].$$

В цилиндрической системе координат для случая, когда есть лишь азимутальная компонента вектора $\vec{A}$ (зависящая от r и z), эти формулы приобретают следующий вид:

$$\left[(\vec{V}\nabla)\vec{A}\right]_r = -\frac{V_\varphi A_\varphi}{r},$$

$$\left[(\vec{V}\nabla)\vec{A}\right]_\varphi = V_z\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + V_r\frac{\partial A_\varphi}{\partial r},$$

$$\left[(\vec{V}\nabla)\vec{A}\right]_z = 0.$$

Учет этих членов приводит к компенсации ряда слагаемых, соответствующих силе Лоренца. Приведем окончательный результат вычислений вида уравнений (6) в цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \dfrac{e}{mc}\dot{\varphi}r\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial r}, \\ r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} = -\dfrac{e}{mc}\dot{r}A_\varphi - \dfrac{e}{mc}r\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial t}, \\ \ddot{z} = \dfrac{e}{mc}r\dot{\varphi}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial z}. \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, предполагается, что эта система более точно описывает физическую реальность, чем системы (1),(2) и (3).

Пусть

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left[\vec{B}_0\,\vec{r}\right]. \quad (10)$$

Здесь $\vec{B}_0$ - постоянный вектор. Ротор от такого векторного потенциала дает однородное магнитное поле (как раз $\vec{B}_0$). В цилиндрических координатах выражение для этого потенциала будет иметь вид

$$\vec{A} = \frac{r}{2}\left|\vec{B}_0\right|\vec{i}_\varphi$$

(если считать, что $\vec{B}_0$ направлен вдоль оси *z*). Таким образом,

$$A_\varphi = \frac{r}{2}\left|\vec{B}_0\right|.$$

Для случая установившегося движения по окружности (когда $\ddot{r} = 0, \quad \dot{r} = 0$) из первого уравнения приведенной выше системы (9) следует, что

$$\dot{\varphi} = -\frac{e}{2mc}B_0. \quad (11)$$

Таким образом, мы получаем вращение частицы с полуциклотронной частотой. Также имеется решение, соответствующее отсутствию вращения:

$$\dot{\varphi} = 0.$$

Второе же уравнение дает соотношение

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0,$$

то-есть мы получаем сохранение *z*-компоненты момента вращающейся частицы.

ДОПОЛНЕНИЕ: возникает вопрос – бывают ли ситуации, когда сила, действующая на частицу, соответствует стандартной силе Лоренца? Далее мы будем рассуждать качественно. Предположим, что пространство плотно заполнено бесконечными тонкими цилиндрическими соленоидами. Векторный потенциал внутри каждого соленоида определяется формулой (10). Тогда при пролете частицы через участок такой среды (**поперек** соленоидов) векторный потенциал будет в среднем равен нулю. Но магнитное поле никуда не денется. Таким образом, второе слагаемое в формуле (6) будет равно нулю, и формула примет стандартный вид (для поперечного движения).

Где может возникать такая «среда»? Во-первых: рядом с полюсами магнетиков (и внутри самих магнетиков). Во-вторых: в плоскости, разделяющей одноименные полюсы катушек-соленоидов (уже макроскопических, в отличие от предыдущего абзаца), приближенные друг к другу. Из гидродинамики известно, что на границе двух разноскоростных потоков может возникать неустойчивость (с образованием вихрей), пример – неустойчивость Гельмгольца. Родственная ситуация, предположительно, возникает в окрестности плоскости, разделяющей одноименные полюсы катушек-соленоидов. Здесь «встречаются» противоположно направленные векторные поля потенциалов. Причем картина магнитного поля, возможно, не изменится, если учитывать возникновение вихрей.

По-видимому, именно такая вихревая картина возникает при использовании так называемого «каспа» (реверса магнитного поля) для закрутки электронов [3]. Гипотетические тонкие соленоиды будут направлены вдоль радиуса (как и магнитное поле между полюсами). И для расчета закрутки электрона при пролете через такую плоскость можно применять стандартные уравнения Лагранжа (и стандартную силу Лоренца).

Список литературы:

1. Гапонов В.И. «Электроника» Том 1, М.: ГИФМЛ 1960.
2. Цимринг Ш.Е. «Введение в высокочастотную электронику и физику электронных пучков», Н. Новгород: ИПФ РАН 2012.
3 Мануилов В.Н. Электронные пучки для мазеров на циклотронном резонансе и лазеров на свободных электронах // Соросовский образовательный журнал, 2001, №10, с. 81-87.4)
4 Китаев А.Е. «Модифицированные уравнения Лагранжа и Гамильтона в применении к диссипативным системам. Возможные следствия для теории электромагнетизма», РСПОВИ-2014. Сборник докладов. Н.Новгород: 2014.
5. Морс Ф.М., Фешбах Г. «Методы теоретической физики» Том 1. М.: ИЛ, 1958.