Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Воздействие плавно модулированных импульсов на двухуровневую систему.

1

В работе [1] была рассмотрена двухуровневая квантовая система с нелинейной релаксацией, на которую действует векторный электромагнитный потенциал в виде косинусоиды с постоянной амплитудой

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos wt, \quad \vec{A}_0 = const.$$

Исследовалось равновесное состояние, возникающее в такой системе. Приведем уравнения, полученные в этой статье:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma {C_2}^2 C_1 + \dfrac{ew_{21}}{2\hbar c} C_2 \vec{A}_0 \vec{r}_{12}, \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma {C_1}^2 C_2 - \dfrac{ew_{21}}{2\hbar c} C_1 \vec{A}_0 \vec{r}_{21}. \end{cases} \qquad (1)$$

Коэффициент релаксации:

$$\gamma = \frac{2e^2}{3c^3\hbar} {w_{21}}^3 \left|\vec{r}_{21}\right|^2. \qquad (2)$$

Здесь мы рассмотрим не постоянную, а плавно зависящую от времени амплитуду поля. Сразу запишем уравнения, описывающие 2-уровневую систему, на которую оказывается подобное воздействие:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma {C_2}^2 C_1 + \dfrac{ew_{21}}{2\hbar c} C_2 f(t) \vec{A}_0 \vec{r}_{12}, \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma {C_1}^2 C_2 - \dfrac{ew_{21}}{2\hbar c} C_1 f(t) \vec{A}_0 \vec{r}_{21}. \end{cases} \qquad (3)$$

Видно, что амплитуда электромагнитной волны промодулирована функцией *f(t)*. Имеет смысл выбрать эту функцию так, чтобы ее максимальное значение по абсолютной величине было сравнимо с единицей.

Обратим внимание на нелинейные первые слагаемые в правых частях уравнений (3) – они ответственны за эффект «сползания» системы с верхнего уровня на нижний (сопровождаемый спонтанным излучением).

Предположим также, что $\vec{r}_{12} = \vec{r}_{21}$ и введем для меньшей громоздкости следующее обозначение:

$$N_{21} = \frac{ew_{21}}{2\hbar c} \vec{A}_0 \vec{r}_{21} = \frac{ew_{21}}{2\hbar c} \left|\vec{A}_0\right| \left|\vec{r}_{21}\right| \cos\theta_{21}.$$

Тогда система (3) приобретет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma {C_2}^2 C_1 + N_{21} C_2 f(t), \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma {C_1}^2 C_2 - N_{21} C_1 f(t). \end{cases} \qquad (4)$$

Определимся теперь более подробно с временной зависимостью внешнего воздействия. В работе [2] было показано, что при спонтанных переходах излучающий ток пропорционален следующей функции времени:

$$F(t)=\frac{\sqrt{B}e^{Gt}}{1+Be^{2Gt}},$$

где *B* – произвольная константа, а *G* – величина, аналогичная γ (см.формулу (2) настоящей статьи, только все параметры будут относиться к внешней излучающей системе, породившей данный электромагнитный импульс). Отметим, что *G* – это, по сути, параметр, определяющий спадание импульса (чем он больше, тем быстрее спадает импульс).

Напомню - заполнением данного импульса пусть будет косинусоида с частотой, равной частоте перехода. Система для такого внешнего воздействия приобретет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt}=\gamma C_2{}^2C_1+N_{21}C_2\dfrac{\sqrt{B}e^{Gt}}{1+Be^{2Gt}}, \\ \dfrac{dC_2}{dt}=-\gamma C_1{}^2C_2-N_{21}C_1\dfrac{\sqrt{B}e^{Gt}}{1+Be^{2Gt}}. \end{cases} \tag{5}$$

Если учесть, что

$$C_1{}^2+C_2{}^2=1,$$

уравнения «расцепляются»:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt}=\gamma(1-C_1{}^2)C_1+N_{21}(\pm\sqrt{1-C_1{}^2})\dfrac{\sqrt{B}e^{Gt}}{1+Be^{2Gt}}, \\ \dfrac{dC_2}{dt}=-\gamma(1-C_2{}^2)C_2-N_{21}(\pm\sqrt{1-C_2{}^2})\dfrac{\sqrt{B}e^{Gt}}{1+Be^{2Gt}}. \end{cases}$$

К сожалению, для уравнений такого вида неизвестны способы аналитического решения. Мы рассмотрим некоторые частные случаи, когда удается получить решение в явном виде.

2

Далее мы будем считать, что $\gamma << G$, то-есть пренебрежем спонтанным излучением в нашей системе (которая подвергается внешнему воздействию). Фактически это означает, что некая система по соседству генерирует импульсы с аналогичным заполнением (на той же резонансной частоте перехода), но более короткие, чем те, что излучает наша система при спонтанном переходе со второго уровня на первый.

Запишем второе уравнение в этом приближении (отбросив первое слагаемое правой части), учитывая нормировку коэффициентов *C*.

$$\frac{dC_2}{dt}=-N_{21}\sqrt{1-C_2{}^2}\,\frac{\sqrt{B}e^{Gt}}{1+Be^{2Gt}}. \tag{6}$$

Квадратный корень здесь является двузначной функцией.

Выражение (6) представляет собой несложное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Приступим к решению, собрав в слева и справа члены, зависящие от C_2 и от *t*.

$$\frac{dC_2}{\sqrt{1-C_2{}^2}}=-N_{21}\frac{\sqrt{B}e^{Gt}}{1+Be^{2Gt}}dt. \tag{7}$$

Пусть *G*=0, а *B*=1 (это означает, что внешний импульс с косинусоидальным заполнением превращается в «ровную» косинусоиду). Тогда выражение (7) превращается в следующее равенство:

$$\frac{dC_2}{\sqrt{1-C_2{}^2}}=-N_{21}dt. \tag{8}$$

Проинтегрировав (8), получим:

$$\arcsin C_2 = -N_{21}t + const,$$
$$C_2 = \sin(-N_{21}t + const).$$

Фактически это есть известные колебания Раби. N_{21} – это частота Раби, деленная пополам. Амплитуда C колеблется именно с такой частотой.

Вернемся к выражению (7) при произвольных значениях параметров G,B и проинтегрируем его.

$$\arcsin C_2 = -N_{21}\sqrt{B}\,\frac{1}{G\sqrt{B}}\,arctg(\sqrt{B}e^{Gt}) + const = -\frac{N_{21}}{G}arctg(\sqrt{B}e^{Gt}) + const,$$
$$C_2 = \sin(-\frac{N_{21}}{G}arctg(\sqrt{B}e^{Gt}) + const). \qquad (9)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи этого выражения.

А. Пусть
$$\frac{N_{21}}{G} = 1,$$
$$const = \pi.$$

Тогда, учитывая формулу
$$\sin arctg(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad (10)$$
мы получим:
$$C_2 = \sin(arctg(\sqrt{B}e^{Gt})) = \frac{\sqrt{B}e^{Gt}}{\sqrt{1+Be^{2Gt}}}. \qquad (11)$$

При стремлении t к плюс-бесконечности выражение для C_2 асимптотически приближается к единице. А при стремлении t к минус-бесконечности – к нулю. Таким образом, это решение можно интерпретировать как переход C_2 от нуля к единице – «возбуждение» системы (переход с уровня 1 на уровень 2).

Б. Теперь пусть
$$\frac{N_{21}}{G} = 1,$$
$$const = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда, учитывая формулу
$$\cos arctg(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad (12)$$
мы получим:
$$C_2 = \cos(arctg(\sqrt{B}e^{Gt})) = \frac{1}{\sqrt{1+Be^{2Gt}}}. \qquad (13)$$

При стремлении t к плюс-бесконечности выражение для C_2 асимптотически приближается к нулю. А при стремлении t к минус-бесконечности – к единице. Таким образом, это решение можно интерпретировать как обратный процесс - переход C_2 от единицы к нулю («сброс» системы).

Таким образом, делаем вывод - поведение системы в этом случае (сброс или подъем при действии импульса) зависит от «начального» значения C_2 при $t \to -\infty$.

Отметим также, что функции (11) и (13) появляются в статье [2] как решения для нелинейной двухуровневой системы при отсутствующем внешнем воздействии.

ЗАМЕЧАНИЕ: *При этих процессах двухуровневая система будет излучать. Если считать, что наша система подобна квазиклассическому электрическому диполю (см. [2]), излучающий ток можно вычислить по формуле:*

$$\vec{j} = e\frac{d}{dt}(\psi^*(t,\vec{r})\vec{r}\psi(t,\vec{r})) = e\vec{r}\frac{d}{dt}(\psi^*(t,\vec{r})\psi(t,\vec{r})) \ .$$

При этом излучение системы, так же как и внешнее воздействие, будет квазимонохроматическим (на той же частоте – частоте внешнего воздействия). Но направленность его будет соответствовать направленности волн излучающего диполя (а не направлению волны внешнего воздействия).

В. Пусть теперь

$$const = \pi,$$

$$\frac{N_{21}}{G} \to 0.$$

Тогда

$$C_2 = \sin(\frac{N_{21}}{G}arctg(\sqrt{B}e^{Gt})) \approx \frac{N_{21}}{G}arctg(\sqrt{B}e^{Gt}). \tag{14}$$

Пусть время стремится к бесконечности. Тогда

$$C_2(\infty) \approx \frac{N_{21}}{G}\frac{\pi}{2} = \frac{ew_{21}}{2\hbar c}\vec{A}_0\vec{r}_{21}\frac{1}{G}\frac{\pi}{2}. \tag{15}$$

В минус-бесконечности:

$$C_2(-\infty) \approx -\frac{N_{21}}{G}\frac{\pi}{2} = -\frac{ew_{21}}{2\hbar c}\vec{A}_0\vec{r}_{21}\frac{1}{G}\frac{\pi}{2}.$$

Хотелось бы подобрать параметры так, чтоб происходил перескок от нуля к некоторому небольшому значению.

Г. Пусть

$$const = \pi - \frac{\pi}{2}\frac{N_{21}}{G},$$

$$\frac{N_{21}}{G} \to 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C_2 &= \sin(-\frac{N_{21}}{G}arctg(\sqrt{B}e^{Gt}) - \frac{\pi}{2}\frac{N_{21}}{G} + \pi) = \\ &= \sin(\frac{N_{21}}{G}arctg(\sqrt{B}e^{Gt}) + \frac{\pi}{2}\frac{N_{21}}{G}) \approx \frac{N_{21}}{G}arctg(\sqrt{B}e^{Gt}) + \frac{\pi}{2}\frac{N_{21}}{G}. \end{aligned} \tag{16}$$

Пусть время стремится к бесконечности. Тогда

$$C_2(\infty) \approx \frac{N_{21}}{G}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{N_{21}}{G} = \pi\frac{N_{21}}{G} = \frac{ew_{21}}{2\hbar c}\vec{A}_0\vec{r}_{21}\frac{1}{G}\pi. \tag{17}$$

В минус-бесконечности:

$$C_2(-\infty) \approx -\frac{N_{21}}{G}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{N_{21}}{G} = 0.$$

Это как раз то, что нам хотелось – перескок вверх от нулевого (в минус-бесконечности) значения.

Возведем значение для плюс-бесконечности в квадрат:

$$C_2{}^2(\infty) \approx \frac{e^2 w_{21}{}^2}{4\hbar^2 c^2} \left|\vec{A}_0\right|^2 \left|\vec{r}_{21}\right|^2 \cos^2\theta_{21} \frac{\pi^2}{G^2}. \qquad (18)$$

Учтем, что

$\dfrac{w_{21}{}^2 \left|\vec{A}_0\right|^2}{c^2} = \varepsilon_e 16\pi$ - это есть усредненная объемная плотность энергии электрического поля (с точностью до коэффициента),

$\dfrac{e^2}{\hbar^2} \left|\vec{r}_{21}\right|^2 \cos^2\theta_{21} = \dfrac{B}{4\pi^2}$ - коэффициент Эйнштейна [4 с 375] (также с точностью до коэффициента).

Получаем:

$$C_2{}^2(\infty) G \approx \frac{B}{4\pi^2} \varepsilon_e 16\pi \frac{\pi^2 k^2}{G} = B\frac{\varepsilon_e}{G} 4\pi k^2. \qquad (19)$$

Левую часть этого выражения можно рассматривать как вероятность, деленную на время $\dfrac{1}{G}$. Множитель $\dfrac{\varepsilon_e}{G}$ в правой части будем принимать за усредненную плотность энергии внешнего электрического поля, приходящуюся на интервал частот G. В этом случае мы с точностью до коэффициента получаем сходство с соотношением из теории Эйнштейна для поглощения электромагнитного излучения [4 с 375].

Д. Далее пусть

$$const = \frac{\pi}{2}\frac{N_{21}}{G},$$

$$\frac{N_{21}}{G} \to 0.$$

Тогда

$$C_2 = \sin\left(-\frac{N_{21}}{G} arctg(\sqrt{B}e^{Gt}) + \frac{\pi}{2}\frac{N_{21}}{G}\right) \approx -\frac{N_{21}}{G} arctg(\sqrt{B}e^{Gt}) + \frac{\pi}{2}\frac{N_{21}}{G}.$$

Если время стремится к плюс-бесконечности,

$$C_2(\infty) \approx -\frac{N_{21}}{G}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{N_{21}}{G} = 0.$$

В минус-бесконечности:

$$C_2(-\infty) \approx \frac{N_{21}}{G}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{N_{21}}{G} = \pi\frac{N_{21}}{G} = \frac{e w_{21}}{2\hbar c} \vec{A}_0 \vec{r}_{21} \frac{1}{G}\pi. \qquad (20)$$

Это есть перескок вниз.

3

Вернемся к уравнениям, учитывающим спонтанное излучение. Запишем второе уравнение системы (5) для общего вида модулирующей функции *F(t)* (сохраняя диссипативный член – первое слагаемое в правой части).

$$\frac{dC_2}{dt} = -\gamma(1 - C_2{}^2)C_2 - N_{21}\sqrt{1 - C_2{}^2}F(t). \qquad (21)$$

Знак квадратного корня неопределен в данной формуле (то-есть перед вторым слагаемым правой части вместо минуса может стоять и плюс).

Будем искать его решение в следующем виде:

$$C_2 = \sin(\vartheta(t)).$$

Подставим это в уравнение (21):

$$\cos(\vartheta(t))\frac{d\vartheta}{dt} = -\gamma(1-\sin^2(\vartheta(t)))\sin(\vartheta(t)) - N_{21}\sqrt{1-\sin^2(\vartheta(t))}F(t),$$

$$\cos(\vartheta(t))\frac{d\vartheta}{dt} = -\gamma\cos^2(\vartheta(t))\sin(\vartheta(t)) \pm N_{21}\cos(\vartheta(t))F(t).$$

Знаки плюс-минус остаются от квадратного корня.

Сокращая косинус, получим:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\gamma\cos(\vartheta(t))\sin(\vartheta(t)) \pm N_{21}F(t). \qquad (22)$$

Это уравнение выглядит несколько проще, чем (21). Попробуем подобрать специальный вид внешнего воздействия *F(t)*, при наличии которого уравнение относительно легко решается. Пусть

$F(t) = \cos(\vartheta(t))\sin(\vartheta(t))$, где $\vartheta(t)$ - неизвестная функция. Тогда уравнение принимает такой вид:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -(\gamma \pm N_{21})\cos(\vartheta(t))\sin(\vartheta(t)).$$

Его решение:

$$\vartheta(t) = arctg(Se^{-(\gamma \pm N_{21})t}).$$

Здесь *S* – произвольная константа. Итак, если

$$F(t) = \cos(arctg(Se^{-(\gamma \pm N_{21})t}))\sin(arctg(Se^{-(\gamma \pm N_{21})t})),$$

решение для C_2 имеет следующий вид:

$$C_2 = \sin arctg(Se^{-(\gamma \pm N_{21})t}) = \frac{Se^{-(\gamma \pm N_{21})t}}{\sqrt{1+S^2e^{-2(\gamma \pm N_{21})t}}}.$$

Фактически это есть аналог сброса системы внешним излучением, рассмотренного в пункте (**Б**). «Естественное» спонтанное излучение усилено (или ослаблено – в зависимости от знака перед N_{21}) «сбрасывающе-поднимающим» действием импульса.

4

Все предыдущие выкладки проводились с действительными величинами *C*. Однако интересно учесть возможность наличия произвольных начальных фаз у амплитуд волновых функций. Для этого нужно «комплексифицировать» уравнения (4).

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma(1-\left|C_1^2\right|)C_1 + N_{21}C_2 f(t), \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma(1-\left|C_2^2\right|)C_2 - N_{21}C_1 f(t). \end{cases} \qquad (23)$$

Пусть

$$C_1 = \left|C_1\right|e^{i\varphi_1}, \quad \left|C_1\right| = S_1,$$

$$C_2 = \left|C_2\right|e^{i\pi}e^{i\varphi_1} = -\left|C_2\right|e^{i\varphi_1}, \quad \left|C_2\right| = S_2.$$

Обращаю внимание – для удобства фазу C_2 мы отсчитываем не от нуля, а от π.

Для введенных таким образом величин (модулей комплексных амплитуд и фаз) получаются следующие комплексные уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_1}{dt} + iS_1\dfrac{d\varphi_1}{dt} = \gamma(1-S_1^2)S_1 - N_{21}S_2 f(t)\cos(\varphi_2-\varphi_1) - iN_{21}S_2 f(t)\sin(\varphi_2-\varphi_1), \\ -\dfrac{dS_2}{dt} - iS_2\dfrac{d\varphi_2}{dt} = \gamma(1-S_2^2)S_2 - N_{21}S_1 f(t)\cos(\varphi_1-\varphi_2) - iN_{21}S_1 f(t)\sin(\varphi_1-\varphi_2). \end{cases} \qquad (24)$$

Нужно помнить, что

$$S_1^2 + S_2^2 = 1.$$

Мнимые части вышеприведенных уравнений (24):

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{dt} = N_{21}\dfrac{S_2}{S_1} f(t)\sin(\varphi_1 - \varphi_2), \\ -\dfrac{d\varphi_2}{dt} = -N_{21}\dfrac{S_1}{S_2} f(t)\sin(\varphi_1 - \varphi_2). \end{cases}$$

Сложим эти уравнения.

$$\frac{d}{dt}(\varphi_1 - \varphi_2) = N_{21}(\frac{S_2}{S_1} - \frac{S_1}{S_2}) f(t)\sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Если разность фаз много меньше единицы,

$$\frac{d}{dt}(\varphi_1 - \varphi_2) = -N_{21}(\frac{S_1}{S_2} - \frac{S_2}{S_1}) f(t)(\varphi_1 - \varphi_2) = -N_{21}\frac{S_1{}^2 - S_2{}^2}{S_2 S_1} f(t)(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (25)$$

Видно, что разность фаз (которая, кстати, входит в выражение для плотности тока данной системы) зависит от времени, и в ряде случаев может иметь место ее затухание до нуля. В частности – для положительного N_{21} и квазипостоянных $f(t)$, S_1 и S_2 (причем S_1 должно быть больше S_2). Так как фазу второй амплитуды мы отсчитывали не от нуля, а от π, в случае уменьшения разности фаз до нуля амплитуды C будут находиться в противофазе.

Запишем реальные части уравнений (24):

$$\begin{cases} \dfrac{dS_1}{dt} + = \gamma(1 - S_1{}^2)S_1 - N_{21}S_2 f(t)\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \\ -\dfrac{dS_2}{dt} = \gamma(1 - S_2{}^2)S_2 - N_{21}S_1 f(t)\cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{cases}$$

Для разности фаз, много меньшей единицы:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_1}{dt} + = \gamma(1 - S_1{}^2)S_1 - N_{21}\sqrt{1 - S_1{}^2}\, f(t), \\ \dfrac{dS_2}{dt} = -\gamma(1 - S_2{}^2)S_2 + N_{21}\sqrt{1 - S_2{}^2}\, f(t). \end{cases}$$

Второе уравнение сходно с уравнением (21), только знак корня в последней формуле определен и является положительным.

Список литературы:

1) Китаев А.Е. «Равновесие двухуровневой системы
и электромагнитного поля». Опубл. в Интернете.
2) Китаев А.Е. «Что такое квант света». Опубл. в Интернете
(сайт science-nighny.narod.ru).
3) Лоудон Р. «Квантовая теория света», М. «Мир» 1976.
4) Д.И.Блохинцев «Основы квантовой механики» М. “Наука” 1976.