Китаев А.Е.
kitaev_a_e@mail.ru

Воздействие плавно модулированных импульсов на двухуровневую систему.

В работе [1] была рассмотрена двухуровневая квантовая система с нелинейной релаксацией, на которую действует векторный электромагнитный потенциал в виде косинусоиды с постоянной амплитудой (исследовалось равновесное состояние, возникающее в такой системе). Здесь мы рассмотрим зависящую от времени амплитуду поля. Пусть векторный потенциал задан и имеет следующий вид:

$$\vec{A}=\vec{A}_0 f(t), \quad \vec{A}_0 = const.$$

Явный вид функции *f(t)* будет уточнен в дальнейшем (сразу скажем - это будет косинусоида с плавной модуляцией определенного вида).

Запишем уравнения для этой системы, оставляя лишь те слагаемые с участием векторного потенциала, которые могут дать резонанс при приближении частоты поля к частоте квантового перехода:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt}=\gamma C_2{}^2 C_1+\dfrac{ke}{mc}C_2 f(t)e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t}\displaystyle\int \psi^*{}_1(\vec{A}_0\nabla)\psi_2 dv, \\ \dfrac{dC_2}{dt}=-\gamma C_1{}^2 C_2+\dfrac{ke}{mc}C_1 f(t)e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}\displaystyle\int \psi^*{}_2(\vec{A}_0\nabla)\psi_1 dv. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь k=2/3, а

$$\gamma=\frac{ke^2}{c^3\hbar}w_{21}{}^3\left|\vec{r}_{21}\right|^2=\frac{2e^2}{3c^3\hbar}w_{21}{}^3\left|\vec{r}_{21}\right|^2. \tag{2}$$

Обратим внимание на нелинейные первые слагаемые в правых частях уравнений (1) – они ответственны за эффект «сползания» системы с верхнего уровня на нижний (сопровождаемый спонтанным излучением).

Так как мы пренебрегаем зависимостью векторного потенциала от пространственных координат, можно произвести следующую замену:

$$\nabla \to -w_{kl}\frac{m}{\hbar}\vec{r}.$$

Индексы *k* и *l* при этом будут соответствовать индексам волновых функций, интегрируемых по пространству.

Запишем преобразованные уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt}=\gamma C_2{}^2 C_1-\dfrac{kew_{12}}{2\hbar c}C_2 e^{iw_{12}t}f(t)\vec{A}_0\displaystyle\int \psi^*{}_1\vec{r}\psi_2 dv, \\ \dfrac{dC_2}{dt}=-\gamma C_1{}^2 C_2-\dfrac{kew_{21}}{2\hbar c}C_1 e^{iw_{21}t}f(t)\vec{A}_0\displaystyle\int \psi^*{}_2\vec{r}\psi_1 dv. \end{cases}$$

Или, если обозначить интегралы как матричные элементы радиус-вектора (и учесть, что w_{12}=-w_{21}):

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt}=\gamma C_2{}^2 C_1+\dfrac{kew_{21}}{2\hbar c}C_2 e^{-iw_{21}t}f(t)\vec{A}_0\vec{r}_{12}, \\ \dfrac{dC_2}{dt}=-\gamma C_1{}^2 C_2-\dfrac{kew_{21}}{2\hbar c}C_1 e^{iw_{21}t}f(t)\vec{A}_0\vec{r}_{21}. \end{cases} \tag{3}$$

Введем для меньшей громоздкости следующее обозначение:

$$N_{21}=\frac{kew_{21}}{2\hbar c}\vec{A}_0\vec{r}_{21}=\frac{kew_{21}}{2\hbar c}\left|\vec{A}_0\right|\left|\vec{r}_{21}\right|\cos\theta_{21}.$$

Предположим также, что $\vec{r}_{12} = \vec{r}_{21}$. Тогда система (3) приобретет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma C_2{}^2 C_1 + 2N_{21} C_2 e^{-iw_{21}t} f(t), \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma C_1{}^2 C_2 - 2N_{21} C_1 e^{iw_{21}t} f(t). \end{cases} \tag{4}$$

Определимся теперь с временной зависимостью внешнего воздействия. В статье [2] было показано, что при спонтанных переходах излучающий ток пропорционален следующей функции времени:

$F(t) = \dfrac{\sqrt{B} e^{Gt}}{1 + Be^{2Gt}}$, где B – произвольная константа, а G – величина, аналогичная γ (см.2), где все параметры относятся к излучающей электромагнитный импульс системе. Отметим, что G – это, по сути, параметр, определяющий спадание импульса (чем он больше, тем быстрее спадает импульс).

Заполнением данного импульса пусть будет косинусоида с частотой, равной частоте перехода. Система приобретет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma C_2{}^2 C_1 + 2N_{21} C_2 e^{-iw_{21}t} \cos w_{21}t \dfrac{\sqrt{B} e^{Gt}}{1 + Be^{2Gt}}, \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma C_1{}^2 C_2 - 2N_{21} C_1 e^{iw_{21}t} \cos w_{21}t \dfrac{\sqrt{B} e^{Gt}}{1 + Be^{2Gt}}. \end{cases}$$

Если представить косинус в виде комплексной экспоненты и пренебречь быстроосциллирующими слагаемыми, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \gamma C_2{}^2 C_1 + N_{21} C_2 \dfrac{\sqrt{B} e^{Gt}}{1 + Be^{2Gt}}, \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -\gamma C_1{}^2 C_2 - N_{21} C_1 \dfrac{\sqrt{B} e^{Gt}}{1 + Be^{2Gt}}. \end{cases} \tag{5}$$

Далее мы будем считать, что $\gamma << G$, то-есть пренебрежем спонтанным излучением в нашей системе (которая подвергается внешнему воздействию). Запишем второе уравнение, учитывая нормировку коэффициентов C.

$$\frac{dC_2}{dt} = -N_{21} \sqrt{1 - C_2{}^2} \frac{\sqrt{B} e^{Gt}}{1 + Be^{2Gt}}. \tag{6}$$

Квадратный корень здесь представляет из себя двузначную функцию.

Выражение (6) представляет собой несложное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Приступим к решению, собрав в слева и справа члены, зависящие от C_2 и от t.

$$\frac{dC_2}{\sqrt{1 - C_2{}^2}} = -N_{21} \frac{\sqrt{B} e^{Gt}}{1 + Be^{2Gt}} dt. \tag{7}$$

Пусть G=0, а B=1 (это означает, что наш импульс с косинусоидальным заполнением превращается в «ровную» косинусоиду). Тогда выражение (7) превращается в следующее равенство:

$$\frac{dC_2}{\sqrt{1 - C_2{}^2}} = -N_{21} dt. \tag{8}$$

Проинтегрировав (8), получим:

$$\arcsin C_2 = -N_{21} t + const,$$

$$C_2 = \sin(-N_{21} t + const).$$

Это есть известные колебания Раби. И величина N_{21} представляет собой их частоту.

Вернемся к выражению (7) при произвольных значениях параметров G,B и проинтегрируем его.

$$\arcsin C_2 = -N_{21}\sqrt{B}\,\frac{1}{G\sqrt{B}}\,arctg(\sqrt{B}e^{Gt}) + const = -\frac{N_{21}}{G}\,arctg(\sqrt{B}e^{Gt}) + const,$$

$$C_2 = \sin(-\frac{N_{21}}{G}\,arctg(\sqrt{B}e^{Gt}) + const). \qquad (9)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

А. Пусть

$$\frac{N_{21}}{G} = 1,$$

$$const = \pi.$$

Тогда, учитывая формулу

$$\sin arctg(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad (10)$$

мы получим:

$$C_2 = \sin(arctg(\sqrt{B}e^{Gt})) = \frac{\sqrt{B}e^{Gt}}{\sqrt{1+Be^{2Gt}}}. \qquad (11)$$

При стремлении t к плюс-бесконечности выражение для C_2 асимптотически приближается к единице. А при стремлении t к минус-бесконечности – к нулю. Таким образом, это решение можно интерпретировать как переход C_2 от нуля к единице – «возбуждение» системы (переход с уровня 1 на уровень 2).

Б. Теперь пусть

$$\frac{N_{21}}{G} = 1,$$

$$const = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда, учитывая формулу

$$\cos arctg(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad (12)$$

мы получим:

$$C_2 = \cos(arctg(\sqrt{B}e^{Gt})) = \frac{1}{\sqrt{1+Be^{2Gt}}}. \qquad (13)$$

При стремлении t к плюс-бесконечности выражение для C_2 асимптотически приближается к нулю. А при стремлении t к минус-бесконечности – к единице. Таким образом, это решение можно интерпретировать как обратный процесс - переход C_2 от единицы к нулю («сброс» системы).

Таким образом, делаем вывод - поведение системы в этом случае (сброс или подъем при действии импульса) зависит от «начального» значения C_2 при $t \to -\infty$. Отметим также, что функции (11) и (13) появляются в статье [2] как решения для нелинейной двухуровневой системы при отсутствующем внешнем воздействии.

ЗАМЕЧАНИЕ: *При этих процессах двухуровневая система будет излучать. Если считать, что наша система подобна квазиклассическому электрическому диполю (см. [2]), излучающий ток можно вычислить по формуле:*

$$\vec{j} = e\frac{d}{dt}(\psi^*(t,\vec{r})\vec{r}\psi(t,\vec{r})) = e\vec{r}\frac{d}{dt}(\psi^*(t,\vec{r})\psi(t,\vec{r})) \ .$$

При этом излучение, так же как и внешнее воздействие, будет квазимонохроматическим (на той же частоте). Но направленность его будет соответствовать направленности волн излучающего диполя (а не направлению волны внешнего воздействия).

B. Пусть теперь

$const = \pi,$

$\frac{N_{21}}{G} \to 0.$

Тогда

$$C_2 = \sin(\frac{N_{21}}{G} arctg(\sqrt{B}e^{Gt})) \approx \frac{N_{21}}{G} arctg(\sqrt{B}e^{Gt}). \qquad (14)$$

Пусть время стремится к бесконечности. Тогда

$$C_2(\infty) \approx \frac{N_{21}}{G}\frac{\pi}{2} = \frac{kew_{21}}{2\hbar c}\vec{A}_0\vec{r}_{21}\frac{1}{G}\frac{\pi}{2}. \qquad (15)$$

Возведем эту величину в квадрат:

$$C_2{}^2(\infty) \approx \frac{k^2e^2w_{21}{}^2}{4\hbar^2c^2}\left|\vec{A}_0\right|^2\left|\vec{r}_{21}\right|^2\cos^2\theta_{21}\frac{\pi^2}{4G^2}. \qquad (16)$$

Учтем, что

$\frac{w_{21}{}^2\left|\vec{A}_0\right|^2}{c^2} = \varepsilon_e 16\pi$ - это есть усредненная объемная плотность энергии электрического поля (с точностью до коэффициента),

$\frac{e^2}{\hbar^2}\left|\vec{r}_{21}\right|^2\cos^2\theta_{21} = \frac{B}{4\pi^2}$ - коэффициент Эйнштейна [4 с 375] (также с точностью до коэффициента).

Получаем:

$$C_2{}^2(\infty)G \approx \frac{B}{4\pi^2}\varepsilon_e 16\pi\frac{\pi^2k^2}{4G} = B\frac{\varepsilon_e}{G}\pi k^2. \qquad (17)$$

Левую часть этого выражения можно рассматривать как вероятность, деленную на время $\frac{1}{G}$. Множитель $\frac{\varepsilon_e}{G}$ в правой части будем принимать за усредненную плотность энергии внешнего электрического поля, приходящуюся на интервал частот *G*. В этом случае мы с точностью до коэффициента получаем сходство с соотношением из теории Эйнштейна для поглощения электромагнитного излучения [4 с 375].

Вернемся к уравнениям, учитывающим спонтанное излучение. Запишем второе уравнение системы (5) для общего вида модулирующей функции *F(t)* (сохраняя диссипативный член – первое слагаемое в правой части).

$$\frac{dC_2}{dt} = -\gamma(1-C_2{}^2)C_2 - N_{21}\sqrt{1-C_2{}^2}F(t). \qquad (18)$$

Будем искать его решение в следующем виде:

$C_2 = \sin(\varphi(t)).$

Подставим это в уравнение (18):

$$\cos(\varphi(t))\frac{d\varphi}{dt} = -\gamma(1-\sin^2(\varphi(t)))\sin(\varphi(t)) - N_{21}\sqrt{1-\sin^2(\varphi(t))}F(t),$$

$$\cos(\varphi(t))\frac{d\varphi}{dt} = -\gamma\cos^2(\varphi(t))\sin(\varphi(t)) \pm N_{21}\cos(\varphi(t))F(t).$$

Знаки плюс-минус остаются от квадратного корня.

Сокращая косинус, получим:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\gamma\cos(\varphi(t))\sin(\varphi(t)) \pm N_{21}F(t). \qquad (19)$$

Это уравнение выглядит несколько проще, чем (18). Попробуем подобрать специальный вид внешнего воздействия *F(t)*, при наличии которого уравнение относительно легко решается. Пусть

$F(t) = \cos(\varphi(t))\sin(\varphi(t)),$ где $\varphi(t)$ - неизвестная функция. Тогда уравнение принимает такой вид:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -(\gamma \pm N_{21})\cos(\varphi(t))\sin(\varphi(t)).$$

Его решение:

$$\varphi(t) = arctg(Se^{-(\gamma\pm N_{21})t}).$$

Здесь *S* – произвольная константа. Итак, если

$$F(t) = \cos(arctg(Se^{-(\gamma\pm N_{21})t}))\sin(arctg(Se^{-(\gamma\pm N_{21})t})),$$

решение для C_2 имеет следующий вид:

$$C_2 = \sin arctg(Se^{-(\gamma\pm N_{21})t}) = \frac{Se^{-(\gamma\pm N_{21})t}}{\sqrt{1+S^2e^{-2(\gamma\pm N_{21})t}}}.$$

Если оставить знак «плюс» перед N_{21} в показателе экспоненты, то при времени, стремящемся к плюс-бесконечности, это выражение стремится к нулю. В минус-бесконечности – к единице. Фактически это есть аналог сброса системы внешним излучением, рассмотренного в пункте (**Б**) – см. выше. «Сбрасывающее» действие импульса усилено «естественным» спонтанным излучением.

Список литературы:

1) Китаев А.Е. «Равновесие двухуровневой системы
и электромагнитного поля». Опубл. в Интернете.
2) Китаев А.Е. «Что такое квант света». Опубл. в Интернете
(сайт science-nighny.narod.ru).
3) Лоудон Р. «Квантовая теория света», М. «Мир» 1976.
4) Д.И.Блохинцев «Основы квантовой механики» М. “Наука” 1976.